

DOI: 10.13875/j.issn.1674-0637.2019-04-0310-09

# 基于 Hilbert 变换的数字鉴相器研究

李兴林<sup>1,2,3</sup>, 刘军良<sup>1,2,3</sup>, 赵当丽<sup>1,2,3</sup>, 关小龙<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院 国家授时中心, 西安 710600;  
2. 中国科学院 时间频率基准重点实验室, 西安 710600;  
3. 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘要:** 利用 Hilbert 变换进行数字鉴相器的设计以避免过零检测获得较高测量精度, 在 Matlab 环境下采用窗函数法和等波纹切比雪夫法设计了 FIR 型 Hilbert 数字滤波器并对数字鉴相器进行仿真实验, 使用 Stable32 进行频率源的仿真和稳定度的计算, 从而验证数字鉴相器的仿真结果。仿真结果证明等波纹切比雪夫法所设计的 Hilbert 数字滤波器较窗函数法设计的 Hilbert 数字滤波器有较好的性能, 更能较好地提高相位的测量精度。

**关键词:** Hilbert 变换; 阿伦偏差; 有限冲激响应 (FIR); 数字鉴相器

## The research on the digital phase detector based on Hilbert transform

LI Xing-lin<sup>1,2,3</sup>, LIU Jun-liang<sup>1,2,3</sup>, ZHAO Dang-li<sup>1,2,3</sup>, GUAN Xiao-long<sup>1,2</sup>

(1. National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;  
2. Key Laboratory of Time and Frequency Primary Standards, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;  
3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** To obtain high measurement precision and avoid zero-crossing detection, a digital phase detector was designed using Hilbert transform. The FIR Hilbert digital filter has been designed by using both the window function method and the ripple Chebyshev method in the Matlab environment. Stability of frequency source was calculated using Stable32 to verify the simulation results of digital phase detector. The simulation results show that the Hilbert digital filter designed by the ripple Chebyshev method has better performance than that designed by using the window function, and can better improve the precision of the phase measurement.

**Key words:** Hilbert transform; Allan variance; finite impulse response (FIR); digital phase detector

## 0 引言

鉴相技术在通信、测距、测向、鉴频、电机控制等多个领域都有广泛的应用<sup>[1]</sup>, 在射电天文学、高速数字通信、高精度时间同步等科学技术领域中, 使用鉴相技术进行频率稳定度测量也十分重要。在时频领域中, 新型的原子钟、喷泉钟、光钟等因具有很高的频率稳定度因而被广泛地作为频率源。商用原

收稿日期: 2019-04-19; 接受日期: 2019-06-03

基金项目: 陕西省科学技术厅科技统筹资助项目 (2018GY-004); 中国科学院“西部之光”人才培养计划西部青年学者 B 类基金资助项目 (XAB2015B13)

作者简介: 李兴林, 男, 硕士, 主要从高精度时间传递研究。

子钟的频率日稳定度在  $10^{-13} \sim 10^{-16}$  之间，例如在甚长基线干涉仪进行天体测量时，使用氢钟作为时钟源，当  $\tau = 1 \text{ ks}$  时频率稳定度的要求为  $\sigma_y(1 \text{ ks}) = 10^{-15[2]}$ ，另外现代工业化进程伴随着的高速度交通工具、深空探索、精密导航定位需求等也对时间频率的高精度测量提出了更高的要求<sup>[3]</sup>，因此对频率稳定度分析的新技术研究具有重要的现实意义。高精度频率源的测量常使用双混频时差测量法，先对信号混频然后过零检测，过零点触发计数器进行测量，但过零点容易受到噪声污染导致测量出现误差，为避免过零检测带来的噪声污染，实现高精度频率稳定度的测量，本文根据 Hilbert 变换原理，分别采用窗函数法和等波纹切比雪夫法设计 FIR (finite impulse response) 型 Hilbert 滤波器，来产生 I、Q 支路，再通过反正切运算求出相位进而可以计算频率稳定度。

## 1 基于 Hilbert 变换的数字鉴相器的设计原理

基于 Hilbert 变换的数字鉴相器的设计核心是 Hilbert 滤波器的设计，利用 Hilbert 滤波器产生 I、Q 支路，通过反正切运算求出相位。

### 1.1 Hilbert 变换的定义

设  $x(t)$  为原子钟输出的连续时间信号，其 Hilbert 变换  $\hat{x}(t)$  定义为<sup>[4]</sup>

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t-\tau)}{\tau} d\tau = x(t) \times \frac{1}{\pi t}, \quad (1)$$

式 (1) 中， $\tau$  为时间变量，连续时间信号  $x(t)$  的 Hilbert 变换  $\hat{x}(t)$  可以看成  $x(t)$  通过具有冲击响应为  $h(t) = 1/\pi t$  的线性滤波器。本文所设计的鉴相器的 Hilbert 滤波器的频率特性为<sup>[5-7]</sup>

$$H(e^{j\omega}) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} j & \omega < 0 \\ -j & \omega > 0 \end{cases}, \quad (2)$$

记系统响应函数  $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$ ， $\omega$  为频率（或角频率），有  $|H(j\omega)| = 1$ ，

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \pi/2 & \omega < 0 \\ -\pi/2 & \omega > 0 \end{cases}, \quad (3)$$

式 (3) 中， $\phi(\omega)$  为相频响应函数， $\omega$  为频率（或角频率），由此可见信号  $x(t)$  的 Hilbert 变换可以看成是信号  $x(t)$  通过一个幅度为 1 的全通滤波器输出，其负频率成分作  $+90^\circ$  相移，而正频率成分作  $-90^\circ$  相移，而不改变频谱分量的幅度。其幅频特性和相频特性如图 1 所示。

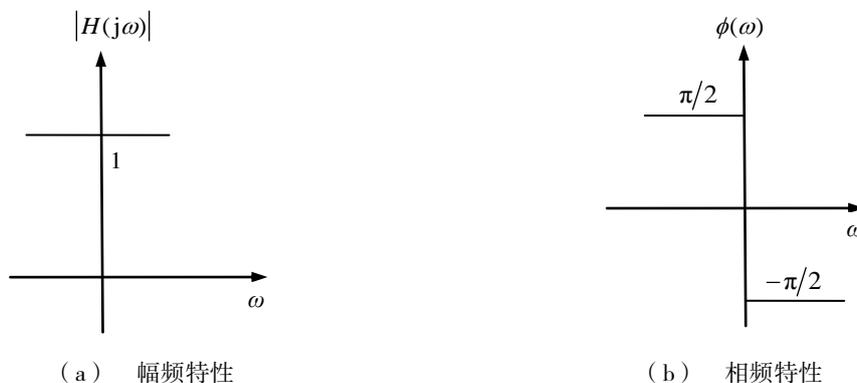
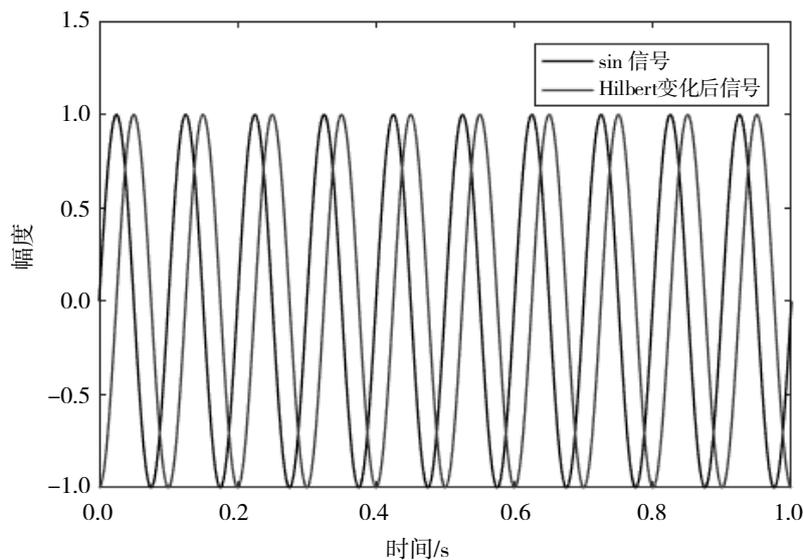


图 1 幅频特性和相频特性

例如：信号  $\sin(2 \times \pi \times 10 \times t)$  通过 Hilbert 变换，将变为信号  $-\cos(2 \times \pi \times 10 \times t)$ ，其仿真图如图 2 所示。

图 2  $\sin(2 \times \pi \times 10 \times t)$  Hilbert 变换仿真

## 1.2 系统的原理框图

基于 Hilbert 变换的数字鉴相器的原理框图如图 3 所示。

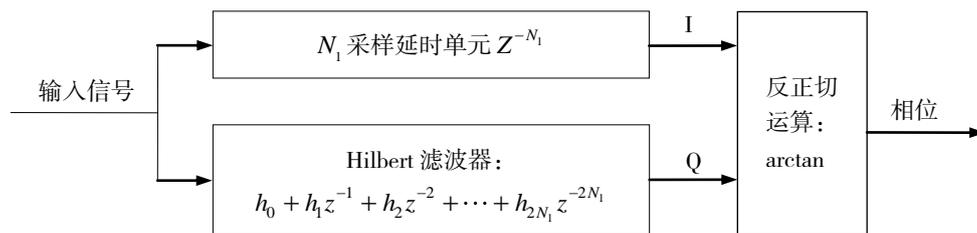


图 3 Hilbert 变换的数字鉴相器的原理框图

输入信号分成两路，一路通过  $2N_1$  阶 Hilbert 滤波器产生 Q 支路，另一路进行  $N_1$  采样延时产生 I 支路。即对信号进行希尔伯特变换就相当于对该信号进行正交移相，产生的 I, Q 支路，使它成为自身的正交对，然后再对产生的 I, Q 路通过反正切运算求出相位。

## 2 FIR 型 Hilbert 数字滤波器的设计

Hilbert 滤波器可以分为 FIR 型和 IIR (high response) 型，FIR 型数字滤波器和 IIR 型数字滤波器相比较有以下优点<sup>[8-10]</sup>：

① FIR 型数字滤波器可以实现严格的线性相位，而 IIR 型数字滤波器要实现严格的线性相位，就会导致选择性变差。

② FIR 数字滤波器主要采用非递归的结构，因而从理论上以及在实际的有限精度的运算中，都是稳定的。IIR 数字滤波器必须采用递归结构，只有极点在平面单位圆内才是稳定的，运算中的四舍五入处理，有时会引起寄生振荡。

为得到严格的线性相位，本文进行了 FIR 型滤波器的设计。具有线性相位 FIR 型数字滤波器的频率响应函数可以统一表示为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\tau\omega} e^{j\beta k} H_r(e^{j\omega}), \quad (4)$$

式(4)中， $\tau = (N-1)/2$  为时延， $N$  为滤波器阶数； $\beta = \pm\pi/2$ ；若  $k=0$  时，为 I, II 型；若  $k=1$  时，为

III, IV 型;  $H_r(e^{j\omega})$  为振幅响应。因为 Hilbert 数字滤波器的单位冲击响应是奇对称的, 即  $h_r(n) = -h_r(-n)$ , 其频率响应函数为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\tau\omega - \beta)} H_r(e^{j\omega}), \tag{5}$$

式 (5) 中,  $\omega$  为频率 (或角频率) 且  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 。

### 2.1 窗函数法设计 Hilbert 数字滤波器

取  $N$  为奇数, 所设计的 Hilbert 数字滤波器的理想频率响应函数为<sup>[11-14]</sup>

$$H_{dl}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \times e^{-j(\omega\tau + \frac{\pi}{2})} & \omega_{cl} \leq |\omega| \leq \omega_{ch} \\ 1 \times e^{-j(\omega\tau - \frac{\pi}{2})} & -\omega_{ch} \leq |\omega| \leq -\omega_{cl} \\ 0 & |\omega| < \omega_{cl}, |\omega| > \omega_{ch} \end{cases}, \tag{6}$$

式 (6) 中,  $\tau = (N-1)/2$  为采样延时;  $\omega_{cl}$ ,  $\omega_{ch}$  分别为下截止频率和上截止频率。其单位冲击响应函数  $h_{dl}$  为

$$h_{dl}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dl}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{ch}}^{-\omega_{cl}} 1 \times e^{-j(\omega\tau - \frac{\pi}{2})} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{cl}}^{\omega_{ch}} 1 \times e^{-j(\omega\tau + \frac{\pi}{2})} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\cos[\omega_{ch}(n-\tau) - \omega_{cl}(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}, \tag{7}$$

于是有

$$h_1(n) = h_{dl}(n) \times \omega(n), \tag{8}$$

式 (8) 中,  $\omega(n)$  为有限长的窗口函数序列。

现设计的带通 Hilbert 滤波器参数为:  $\omega_{s1} = 0.2 \times \pi$ ;  $\omega_{p1} = 0.35 \times \pi$ ;  $\omega_{p2} = 0.65 \times \pi$ ;  $\omega_{s2} = 0.8 \times \pi$ ;  $R_p = 0.003$  dB;  $A_s = 75$  dB ( $\omega_{s1}$ ,  $\omega_{s2}$  为阻带截止频率,  $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$  为通带截止频率,  $R_p$  为通带波动,  $A_s$  为阻带衰减), 窗函数选取布莱克曼窗, 窗函数法设计 Hilbert 滤波器的阶数  $N = 75$ , 其幅频特性和相频特性如图 4 所示。

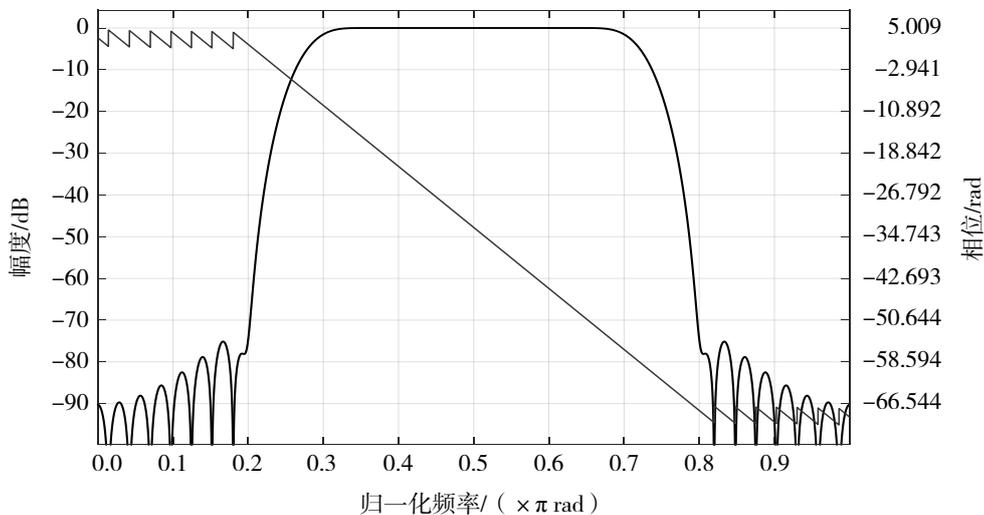


图 4 窗函数法 Hilbert 滤波器的幅频特性和相频特性

## 2.2 等波纹切比雪夫法设计的 Hilbert 数字滤波器

等波纹切比雪夫法采用了 Parks-McClellan 算法, 取  $N$  为奇数, 所设计的 Hilbert 数字滤波器的理想频率响应函数  $H_d(e^{j\omega})$  同式 (6), 其逼近误差函数为<sup>[15-17]</sup>

$$E(\omega) = W(\omega) [H_d(e^{j\omega}) - H(\omega)], \quad (9)$$

式 (9) 中,  $W(\omega)$  为逼近加权函数,  $H(\omega)$  为线性相位 FIR 型数字滤波器的逼近函数。

令  $\delta = \max[E(\omega)]$ , 为获得最优单位冲击响应  $h(n)$ , 需要寻找使  $\delta = \max[E(\omega)]$  最小的逼近函数  $H(\omega)$ , 因此 Hilbert 数字滤波器的频率响应函数为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} j & -\pi < \omega < 0 \\ -j & 0 < \omega < \pi \end{cases} \quad (10)$$

现设计带通 Hilbert 滤波器参数为:  $\omega_{s1} = 0.2 \times \pi$ ;  $\omega_{p1} = 0.35 \times \pi$ ;  $\omega_{p2} = 0.65 \times \pi$ ;  $\omega_{s2} = 0.8 \times \pi$ ;  $R_p = 0.003$  dB;  $A_s = 75$  dB ( $\omega_{s1}$ ,  $\omega_{s2}$  为阻带截止频率,  $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$  为通带截止频率,  $R_p$  为通带波动,  $A_s$  为阻带衰减), 其滤波器的参数与窗函数法设计的 Hilbert 数字滤波器的参数一致, 等波纹切比雪夫法设计 Hilbert 滤波器, 其幅频特性和相频特性如图 5 所示。

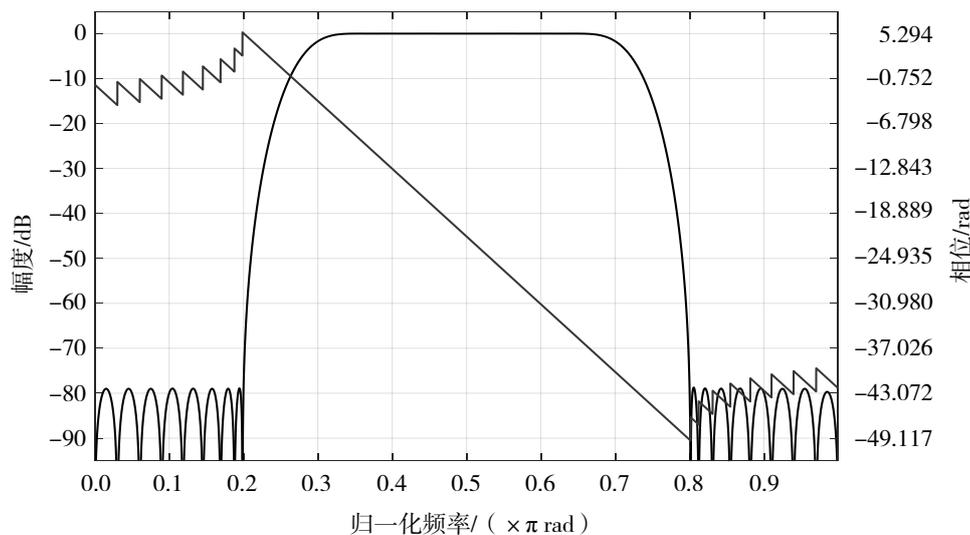


图 5 等波纹法 Hilbert 滤波器的幅频特性和相频特性

## 2.3 窗函数法和等波纹法设计的 Hilbert 数字滤波器的比较

在 2.1 节和 2.2 节中分别采用窗函数法和等波纹切比雪夫法设计带通 Hilbert 滤波器, 滤波器参数都为:  $\omega_{s1} = 0.2 \times \pi$ ;  $\omega_{p1} = 0.35 \times \pi$ ;  $\omega_{p2} = 0.65 \times \pi$ ;  $\omega_{s2} = 0.8 \times \pi$ ;  $R_p = 0.003$  dB;  $A_s = 75$  dB ( $\omega_{s1}$ ,  $\omega_{s2}$  为阻带截止频率,  $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$  为通带截止频率,  $R_p$  为通带波动,  $A_s$  为阻带衰减), 现改变两种方法设计的 Hilbert 滤波器的纵坐标的最小精度, 对通带进行放大, 如图 6 和图 7 所示。

根据图 6 和图 7 我们可以发现, 窗函数的实际响应和理想响应之间的逼近误差, 在全频带区间上是不均匀分布的, 靠近边缘频率处误差较大, 远离边缘频率处较小 (Gibbs 吉布斯现象), 而等波纹法可以实现全频带区间上均匀分布且逼近误差更小, 进而可以用较低的阶数实现相同的技术指标。

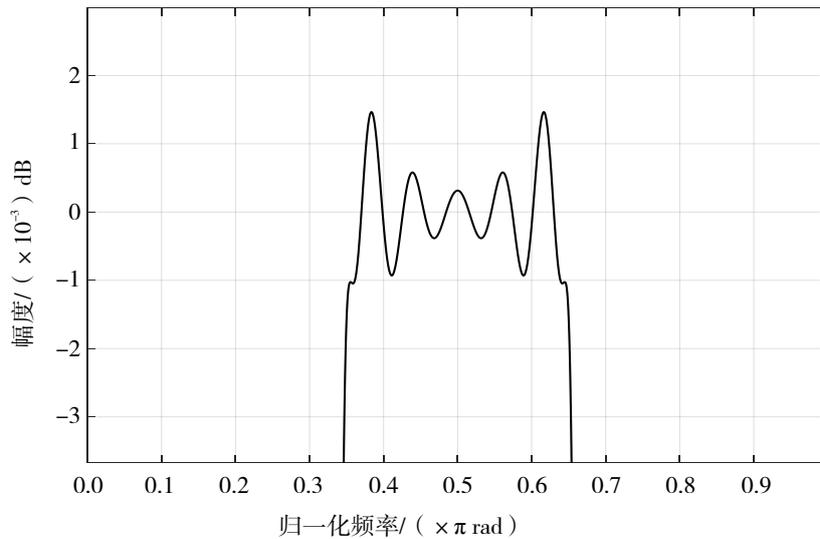


图6 窗函数法设计 Hilbert 滤波器

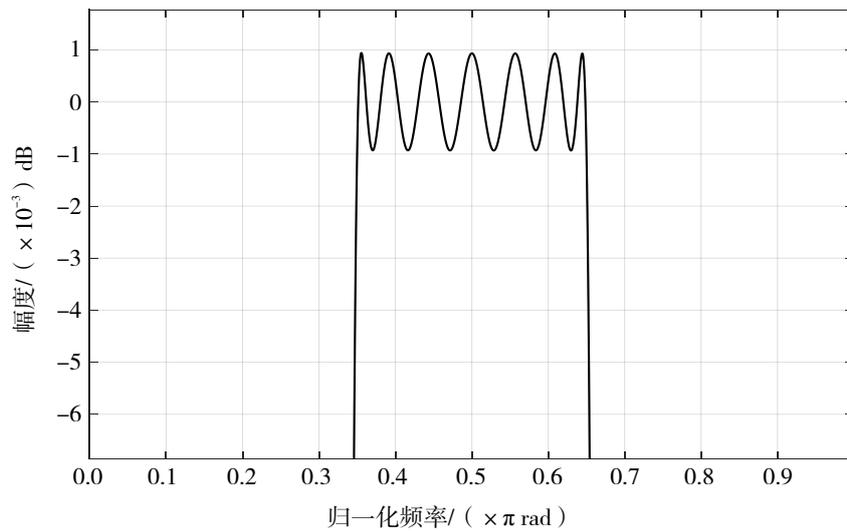


图7 等波纹切比雪夫法设计 Hilbert 滤波器

根据窗函数法和等波纹法设计滤波器的特点我们可以知道，窗函数法不能精确指定阻带截止频率  $\omega_s$  和通带截止频率  $\omega_p$  只能接受设计所得的大体合用值<sup>[18-19]</sup>，等波纹法可以精确指定  $\omega_s$  和  $\omega_p$ ，其次窗函数设计方法中使  $\delta_1 = \delta_2$ ，不能同时控制波动系数  $\delta_1$  和  $\delta_2$ <sup>[20-21]</sup>。

同时在使用 Matlab 进行仿真时可以得到，窗函数法设计 Hilbert 滤波器的阶数  $N = 75$ ，等波纹切比雪夫法设计的 Hilbert 数字滤波器的阶数  $N = 61$ ，并且通带波动  $R_p = 0.0019$  dB， $A_s = 78$  dB，可见等波纹切比雪夫法设计的 Hilbert 数字滤波器用更少的阶数实现了更优的设计指标，故本文采用等波纹切比雪夫法设计 Hilbert 滤波器。

### 3 系统的仿真比较

通过对频率源和系统的整体仿真，验证了系统的可行性，证明了基于 Hilbert 变换的数字鉴相器可实现较高的测量精度。

### 3.1 频率源的仿真

频率源的仿真是根据一组原子钟的典型噪声参数进行的<sup>[22]</sup>，如表 1 所示。

表 1 一组原子钟的典型噪声参数

噪声参数	氢原子钟	铯原子钟	铷原子钟
$A_{wp}$	$1.5 \times 10^{-13}$	-	-
$A_{wf}$	$4.0 \times 10^{-14}$	$8.5 \times 10^{-12}$	$5.0 \times 10^{-12}$
$A_{ff}$	$2.1 \times 10^{-15}$	$2.0 \times 10^{-12}$	$5.2 \times 10^{-14}$
$A_{rw}$	$1.0 \times 10^{-18}$	-	$3.6 \times 10^{-16}$

表 1 中， $A_{wp}$  为相位白噪声， $A_{wf}$  为频率白噪声， $A_{ff}$  为频率闪烁噪声， $A_{rw}$  为随机游走噪声。一般情况下，在进行钟差数据模拟时，可以忽略相位闪烁噪声<sup>[23]</sup>，现根据原子钟的噪声参数，使用 Stable32 软件，进行铯原子钟的频率稳定度的分析，如图 8 所示。

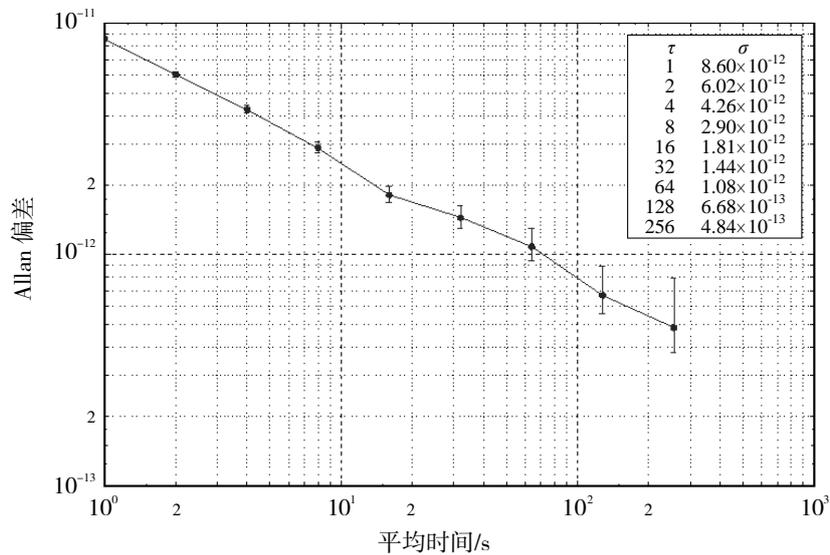


图 8 铯原子钟的频率稳定度

铯原子钟部分相位数据如表 2 所示。

表 2 铯原子钟部分相位数据 s

铯原子钟部分相位数据	
$2.635\ 631\ 801\ 593\ 084 \times 10^{-12}$	$1.073\ 616\ 179\ 764\ 655 \times 10^{-11}$
$-3.172\ 622\ 481\ 680\ 509 \times 10^{-12}$	$4.965\ 097\ 549\ 164\ 005 \times 10^{-12}$
$9.002\ 919\ 459\ 197\ 746 \times 10^{-12}$	$9.270\ 893\ 505\ 550\ 702 \times 10^{-12}$
$1.415\ 208\ 497\ 678\ 448 \times 10^{-11}$	$2.795\ 587\ 848\ 869\ 657 \times 10^{-12}$
$6.943\ 326\ 270\ 601\ 049 \times 10^{-12}$	$1.869\ 809\ 354\ 830\ 754 \times 10^{-11}$
$2.677\ 358\ 786\ 173\ 752 \times 10^{-12}$	$7.026\ 422\ 432\ 714\ 082 \times 10^{-12}$
$2.060\ 630\ 647\ 104\ 853 \times 10^{-12}$	$1.731\ 036\ 431\ 916\ 501 \times 10^{-12}$

### 3.2 系统仿真过程

现设频率源为铯原子钟，其输出信号为 10 MHz 的正弦信号，将 Stable32 软件仿真的铯钟的相位数据拟合到 10 MHz 信号上，拟合后的信号通过 Matlab 进行相关处理并进行系统仿真，将系统产生的相位数据与直接使用 Stable32 软件仿真的铯钟的相位数据进行比较，得到输入前和输入后相位的变化。其部分比对数据如表 3 所示。

表 3 铯原子钟部分比对数据

s

铯原子钟部分原始相位数据	系统产生的相位数据	误差
$2.635\ 631\ 801\ 593\ 084 \times 10^{-12}$	$2.779\ 749\ 266\ 900\ 42 \times 10^{-12}$	$-1.441\ 174\ 653\ 073\ 360 \times 10^{-13}$
$-3.172\ 622\ 481\ 680\ 509 \times 10^{-12}$	$-3.075\ 240\ 171\ 384\ 00 \times 10^{-12}$	$-9.738\ 231\ 029\ 650\ 905 \times 10^{-14}$
$9.002\ 919\ 459\ 197\ 746 \times 10^{-12}$	$8.998\ 245\ 967\ 284\ 76 \times 10^{-12}$	$4.673\ 491\ 912\ 986\ 165 \times 10^{-15}$
$1.415\ 208\ 497\ 678\ 448 \times 10^{-11}$	$1.420\ 218\ 924\ 725\ 59 \times 10^{-11}$	$-5.010\ 427\ 047\ 141\ 920 \times 10^{-14}$
$6.943\ 326\ 270\ 601\ 049 \times 10^{-12}$	$7.113\ 744\ 029\ 196\ 39 \times 10^{-12}$	$-1.704\ 177\ 585\ 953\ 403 \times 10^{-13}$
$2.677\ 358\ 786\ 173\ 752 \times 10^{-12}$	$2.636\ 312\ 159\ 941\ 30 \times 10^{-12}$	$4.104\ 662\ 623\ 245\ 204 \times 10^{-14}$
$2.060\ 630\ 647\ 104\ 853 \times 10^{-12}$	$2.255\ 524\ 574\ 335\ 18 \times 10^{-12}$	$-1.948\ 939\ 272\ 303\ 270 \times 10^{-13}$

从表 3 中我们也可以看到，铯原子钟仿真原始相位数据与本文所设计的鉴相器的输出的相位数据相差较小。

用系统产生的相位数据计算频率稳定度，仿真图如图 9 所示。

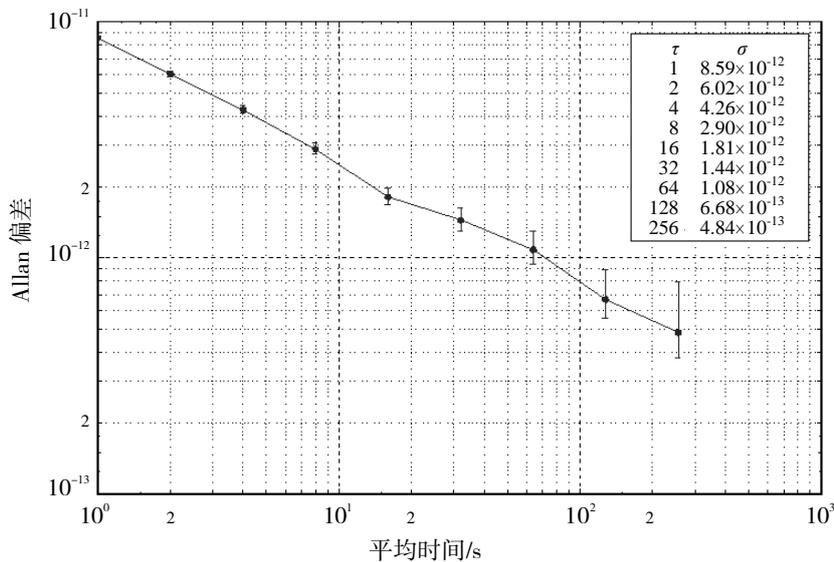


图 9 系统产生的相位数据计算频率稳定度

比较图 8 和图 9 我们可以发现，铯原子钟仿真信号通过基于 Hilbert 变换的数字鉴相器产生相位数据，对其所产生的相位数据使用 Stable32 进行频率稳定度的计算，与铯原子钟仿真信号直接使用 Stable32 计算的频率稳定度的结果基本一致，证明了基于 Hilbert 变换的数字鉴相器可以实现较高的测量精度。

## 4 结语

本文在 Matlab 环境下采用窗函数法和等波纹切比雪夫法设计了 FIR 型 Hilbert 数字滤波器并对数字鉴相器进行仿真实验,证明了采用等波纹切比雪夫法设计的 Hilbert 滤波器较窗函数法设计的 Hilbert 滤波器,可以用更少的阶数实现更优的设计指标,使用 Stable32 进行频率源的仿真和稳定度的计算,验证了基于 Hilbert 变换的数字鉴相器的仿真结果,仿真结果表明利用 Hilbert 变换进行数字鉴相器的设计可以获得较高测量精度,验证了系统的可行性,用数字信号处理的方式代替模拟电路,避免过零检测带来的噪声污染,为后续的硬件平台的搭建提供了理论支撑。

## 参考文献:

- [1] 董雅洁. 高精度数字鉴相方法及其误差分析[D]. 太原: 中北大学, 2014.
- [2] THOMPSON A R, MORAN J M, SWENSON G W Jr. Interferometry and synthesis in radio astronomy[M]. 2nd ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2001.
- [3] 刘娅. 多通道数字化频率测量方法研究与实现[D]. 北京: 中国科学院研究生院, 2010.
- [4] 陈啸晴. 基于 Hilbert 数字滤波的无功功率表设计研究[D]. 长沙: 中南大学, 2009.
- [5] LYONS R G. Understanding digital signal processing [M]. 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2004.
- [6] 组云霄, 庞浩, 李东霞, 等. 一种基于 Hilbert 数字滤波的无功功率测量方法[J]. 电力系统自动化, 2003, 27(16): 50-52.
- [7] 庞浩, 王赞基, 陈建业, 等. 基于两对 Hilbert 移相滤波器的无功功率测量方法[J]. 电力系统自动化, 2006, 30(18): 45-48.
- [8] 胡广书. 数字信号处理: 理论、算法与实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [9] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [10] MITRA S K. Digital signal processing: a computer-based approach[M]. 2nd ed. Beijing: Publishing House of Electronic Industry, 2005.
- [11] 陈维荣. 神经网络及小波变换在牵引供电系统馈线故障检测中的应用研究[D]. 成都: 西南交通大学, 1998.
- [12] LYONS R G. Understanding digital signal processing[M]. Beijing: China Machine Press, 2005.
- [13] 曾喆昭, 李仁发. 希尔伯特变换器优化设计研究[J]. 系统工程学报, 2002, 17(3): 221-224.
- [14] 何正权, 何旭. 多次采样与希尔伯特变换[J]. 电子科技大学学报, 1997, 26(5): 504-510.
- [15] 王薇, 王晓茹, 黄晓青, 等. 无功功率测量的 Hilbert 数字滤波器研究[J]. 电测与仪表, 2007, 44(3): 9-12.
- [16] 陈啸晴. 基于 Hilbert 数字滤波的无功功率表设计研究[D]. 长沙: 中南大学, 2009.
- [17] 李晶晶, 江桦, 王明坤. 希尔伯特变换在信号解调中的应用[J]. 郑州信息工程大学学报, 2002, 3(4):29-31.
- [18] 宋知用. MATLAB 数字信号处理 85 个实用案例精讲—入门到进阶[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2016.
- [19] 张照明, 刘郑波, 刘斌. 应用 MATLAB 实现信号分析和处理[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [20] 万永革. 数字信号处理的 MATLAB 实现[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [21] 陈怀琛. 数字信号处理教程—MATLAB 释义与实现[M]. 北京: 电子工业出版社, 2008.
- [22] DIEZ J, D'ANGELO P, FERNANDEZ A. Clock error simulation and characterisation[J]. Proceedings of the 19th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, Fort Worth: Institute of Navigation, 2006: 815-821.
- [23] DASS T, PETZINGER J, et al. Analysis of on-orbit behavior of GPS block II-R time keeping system[J]. Proceedings of the 30th Annual Precise Time and Time Interval Systems and Applications Meeting, Virginia: Institute of Navigation, 1998: 173-186.