

引用格式：李宗源，袁海波，张虹，等. 基于低通滤波器的原子钟时差测量数据降噪处理及其性能分析[J]. 时间频率学报, 2024, 47(3): 171-179.

基于低通滤波器的原子钟时差测量数据 降噪处理及其性能分析

李宗源^{1,2}, 袁海波^{1,2,3}, 张虹¹, 张继海¹, 刘素芳^{1,2}, 王一桁^{1,2}

- 中国科学院 国家授时中心, 西安 710600;
- 中国科学院大学, 北京 100049;
- 时间基准及应用重点实验室(中国科学院), 西安 710600

摘要: 时间间隔计数器是守时中获取原子钟比对数据最常见的比对设备, 但其获取的比对数据会受硬件性能、被测信号质量和测量方法的影响, 在测量脉冲信号之间的时间差时, 引入一定的不确定度。直接使用原始数据对原子钟中短期稳定度评估可能会带来不可忽略的影响, 简要分析了经 Savitzky-Golay 滤波器降噪后的计数器测量噪声与频率稳定度之间的关系, 并结合 K 折交叉验证方法确定了滤波器各项参数, 以避免滤波失真。实验表明在滤波器多项式阶数为 2, 窗口宽度为 141 时, 所获得的时差数据滤波后能够准确反应被测原子钟平均时间为 100 s 及以上的频率稳定度, 为准确评估原子钟的短期稳定度提供了一种有效的数据处理方法。

关键词: 频率稳定度; 时差测量; 噪声处理; Savitzky-Golay 滤波器

DOI: 10.13875/j.issn.1674-0637.2024-03-0171-09

Noise reduction processing of atomic clock differential measurement data based on low-pass filter and its performance analysis

LI Zong-yuan^{1,2}, YUAN Hai-bo^{1,2,3}, ZHANG Hong¹, ZHANG Ji-hai¹,

LIU Su-fang^{1,2}, WANG Yi-heng^{1,2}

- National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;
- University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;
- Key Laboratory of Time Reference and Applications, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China

Abstract: The time interval counter, a common device for obtaining atomic clock comparison data, is influenced by hardware performance, signal quality, and measurement methods, introducing uncertainty in measuring the time interval of pulse signals. Directly using raw data to evaluate the short-term frequency stability of atomic clocks will result in a noticeable impact. To accurately estimate the short-term frequency stability, it is crucial to process the measurement data. This article analyzes the relationship between counter measurement noise and frequency stability after applying the Savitzky-Golay filter, and determines the filter parameters with

收稿日期: 2023-05-06; 接受日期: 2023-06-17

基金项目: 科学技术部国家天文科学数据中心时间频率数据库(NADC2022YX01-05)

the k-fold cross-validation method to avoid the filtering distortion. Experiments show that a filter with a polynomial order of 2 and window width of 141 accurately reflects the frequency stability of atomic clocks with an average time of 100 seconds or more, providing an effective data processing method for short-term stability assessment.

Key words: frequency stability; time interval measurement; noise processing; Savitzky-Golay filter

现代守时工作是基于原子时的秒长来建立时间尺度,时间比对系统的性能在一定程度上直接影响整个守时系统时间的性能^[1]。守时实验室常用的铯原子钟短期频率稳定度通常优于 $5 \times 10^{-12}/s$,而时间间隔技术器的测量不确定度通常在 100 ps 量级,其可能原因是由线缆长度、量化噪声、时基误差、计数器内插器所引起的非线性误差和输入脉冲的抖动等多种因素构成的^[2-3]。这些噪声往往具有随机性和白噪声特性,若直接采用原始的时差数据,会影响比对的准确性,无法准确反映所测量原子钟的短期性能,因而需要对计数器测量噪声进行处理。

测量噪声的处理方法多种多样,如文献[4]中采用交叉认证方法来确定 Vondrak 滤波器参数后,对精密单点定位时间传递数据进行降噪处理;文献[5]采用 Daubechie 小波对卫星钟的测量数据进行分解,高频部分信号进行取零处理;文献[6]采用经验模式分解的方法对原子钟比对数据进行处理,并与 Kalman 滤波方法进行了比较。这些噪声处理方法的本质都是将原始数据经过一个低通滤波器,扣除高频部分的噪声,保留低频部分的有效信息。但滤波器的截止频率设置不当时,降噪后的数据可能会失真,产生新的噪声,以往的研究中对这一问题并未说明,仅指出滤波后的时差数据相比原始数据具有更小的频率稳定度,这不能表明滤波后数据的频率稳定度更准确。

本文主要通过 K 折交叉验证方法实现了 Savitzky-Golay filter 滤波器的参数确定,并对时差数据进行处理,同时以高精度比相仪获得的频率稳定度为参考,对滤波器的效果进行了评估。

1 基本原理

1.1 频率稳定度

原子钟的内部噪声会影响原子钟的输出频

率在一定范围内波动。通常,采用频率稳定性来描述原子钟输出频率受噪声影响的随机波动。频率稳定性分析分为频域稳定性分析和时域稳定性分析两种。时域稳定性分析可以用来识别原子钟的噪声,计算各种噪声的强度系数。Allan 方差是最常用的时域频率稳定性分析方法^[7-8],其可以表示为

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-2)\tau^2} \sum_{i=1}^{N-2} [x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i]^2 \quad (1)$$

式(1)中: N 为样本个数, τ 为平均时间, x_i 为相位测量值。频域上一般通过幂律谱模型的方式来对频率稳定度进行表示,Allan 方差也可以看作是原始数据的谱密度 $S_x(f)$ 经过滤波后的结果:

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{f_h} (2\pi f)^2 S_x(f) \frac{\sin^4(\pi \tau f)}{(\pi \tau f)^2} df \quad (2)$$

式(2)中, f_h 为测量系统的截止频率。

1.2 测量误差

计数器测量原子钟与参考源的时差可表示为

$$x(t) = x'(t) + \Delta t + \delta \varepsilon(t) \quad (3)$$

式(3)中: $x'(t)$ 为真实时差, Δt 为线缆或测量设备内部的固定时延, $\delta \varepsilon(t)$ 表示测量设备引入噪声,引入噪声的功率谱密度 $S_x(f)$ 可以表示为

$$S_x(f) = \frac{\delta^2}{\tau} \times \tau \times \left(\frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \right)^2 \approx \delta^2 \left(f < \frac{1}{2\tau} \right) \quad (4)$$

式(4)中: τ 为时差数据的采样间隔, δ 表示测量噪声强度。

与式(3)相结合,测量设备所引入噪声与 Allan 方差的关系^[9]如下:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{3\delta^2 f_h}{(2\pi\tau)^2} \quad (5)$$

1.3 Savitzky-Golay 滤波算法

Savitzky-Golay 滤波器是一种特殊的低通滤波

器,其利用最小二乘的思想,给出每个数据点的最佳拟合值来代替原始值。Savitzky-Golay 滤波器直接在时间域上处理信号信息,经过 S-G 滤波器处理后能保留原始数据的极大值、极小值和宽度等分布特性。其基本原理^[10-14]如下:

设有测量序列 $x(n)$, 其中 $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 。以每个数据为中心,其两侧分别有 M 个样本点,便可以通过多项式来对这 $2M+1$ 个数据进行多项式拟合,多项式 $p(n)$ 表示如下:

$$p(n) = \sum_{k=0}^N a_k n^k. \quad (6)$$

式(6)中, N 为多项式的阶数, a_k 为多项式系数。依据最小二乘的思想,采用均方差来表征拟合误差,表示如下:

$$\varepsilon_N = \sum_{n=-M}^M [p(n) - x(n)]^2 = \sum_{n=-M}^M \left(\sum_{k=0}^N a_k n^k - x(n) \right)^2. \quad (7)$$

拟合误差取最小值,便可解算出多项式的系数。Savitzky-Golay 滤波器取 $p(0)$ 作为 $x(0)$ 的滤波结果,也就是多项式系数的 a_0 项,表示如下:

$$y(0) = p(0) = a_0. \quad (8)$$

在滤波时,以 $2M+1$ 的为窗口宽度,随着数据样本向前滑动,依次计算每个滑动窗口中心位置的拟合值,将其作为数据滤波结果。 a_0 也可以通过样本内所有点的线性组合来表示:

$$y(0) = a_0 = \sum_{m=-M}^M h_{0,m} x(m). \quad (9)$$

根据滤波器阶数 N 和 $2M+1$ 构造矩阵 A^T :

$$\begin{bmatrix} (-M)^0 & \cdots & (-1)^0 & (1) & (1)^0 & \cdots & (M)^0 \\ (-M)^1 & \cdots & (-1)^1 & (0) & (1)^1 & \cdots & (M)^1 \\ (-M)^2 & \cdots & (-1)^2 & (0) & (1)^2 & \cdots & (M)^2 \\ (-M)^3 & \cdots & (-1)^3 & (0) & (1)^3 & \cdots & (M)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-M)^N & \cdots & (-1)^N & (0) & (1)^N & \cdots & (M)^N \end{bmatrix}, \text{进}$$

而计算矩阵 $H = (A^T A)^{-1} A^T$, $h_{0,m}$ 为矩阵 H 中第 0 行所对应的元素。在实际工程应用中可以通过预先构建卷积系数表来实现快速计算 $h_{0,m}$ 所对应

的值。

S-G 滤波器在其通带中具有非常平坦的频率响应,可以表示为 $H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 1$, 且:

$$\frac{d^r H(e^{j\omega})}{d\omega^r} \Big|_{\omega=0} = (-j)^r \sum_{n=-M}^M n^r h[n] = 0. \quad (10)$$

式(10)中: r 为 $1, 2, \dots, N$ 。

其归一化截止频率(3 dB 点) f_c 与多项式阶数和窗口宽度均相关,当窗口的宽度一定时,阶数 N 越高,信道带宽越长,滤波器的截止频率也就越大。当阶数一定时,通带长度与滤波器窗口宽度呈反比,窗口宽度越大滤波器的截止频率也就越小。S-G 滤波器的归一化截止频率与多项式阶数及滑动窗口宽度之间有近似关系:

$$f_c = \begin{cases} \frac{N+1}{3.2M-4.6}, & M \geq 25 \text{ 且 } N < M \\ \frac{N+1}{3.2M-2}, & 10 \leq M < 25 \text{ 且 } N < M \end{cases}. \quad (11)$$

结合式(5),得到测量噪声经过 S-G 滤波器后与 Allan 方差的关系如下:

$$\sigma_y^2(\tau) = \begin{cases} \frac{3(N+1)\delta^2}{2(3.2M-4.6)\tau^2}, & M \geq 25 \text{ 且 } N < M \\ \frac{3(N+1)\delta^2}{2(3.2M-2)\tau^2}, & 10 \leq M < 25 \text{ 且 } N < M \end{cases}. \quad (12)$$

一般来说 M 取值过大,数据通过滤波器后部分有效信息也会被扣除,容易造成失真;如果 M 的取值过小,则噪声去除不明显,无法反映真实的数据信息。阶数越高截止频率的调整分辨率越高,也就能够反映出更真实的频率稳定度,但同时为达到相同滤波效果,在数据左右两端截断的数据量也就越大,同时容易拟合过度,导致数据失真,甚至产生新的噪声。通过选取合适的阶数和窗宽,既可以避免新噪声的产生,也可以更准确地反映被测原子钟的频率稳定度,达到在有效降噪的同时,保证数据信息的真实性。

1.4 K 折交叉验证

为选取滤波器的最佳截止频率,本文采用 K 折交叉验证的方法对滤波器的参数进行确定。

交叉验证通常用来对模型进行调参与优化,可以有效地防止过拟合^[15-16]。其实现方法为将测量数据分成大小相近的 k 个部分,每次选择其中一个作为测试样本,其余部分作为平滑样本。给定滤波器的阶数和窗口宽度后,对测量数据的平滑样本部分进行平滑,通过平滑结果外推或内插得到与测试样本的时刻相对应的模拟数据,计算模拟数据与测试样本的方差。重复 k 次,每次选择不同样本作为测试样本,取 k 次方差的平均值作为滤波器的交叉验证误差估计:

$$\varepsilon(N, M, k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [y_i - \hat{y}_i]^2 \quad (13)$$

式(13)中, N 为多项式阶数, M 为窗口宽度, y_i 为每次测试的测试样本, \hat{y}_i 为对应时刻的模拟数据, k 值一般取 5 或 10。

对于不同的滤波器参数则有不同的交叉验证误差,选取交叉验证误差最小时对应的多项式阶数与窗口宽度作为滤波器的参数值。

2 实验分析

2.1 测量数据获取

如图 1 所示,以中国科学院国家授时中心的时间基准 UTC(NTSC)作为参考信号,通过比相仪获得某铯原子钟的相差数据,通过时间间隔计数器获得其时差数据,时间跨度为 4 d(约化儒略日 59 292~59 296),采样间隔为 1 s。

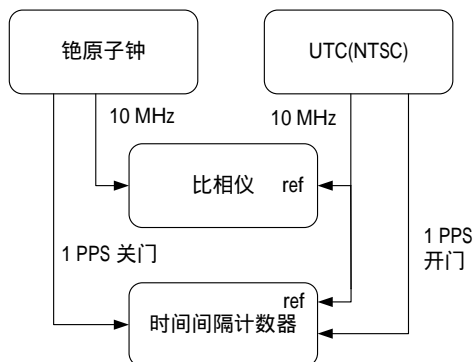


图 1 时差与相差数据测量设备连接框图

原子钟产生的 1 PPS 信号本身不是理想的脉冲信号,且在电缆中传播期间存在失真现象。当测量的目标精度优于 1 ns 时,便需要使用差分技术,

如枢轴法,以减小测量的常见误差。然而由于计数器内部的非线性行为,一些取决于脉冲的形状所带来的测量不确定度,尤其是其上升时间,通常不能通过使用枢轴技术来减轻。当测量相似的快速上升时间脉冲信号时,计数器的测量误差通常在 100 ps,而其中一个脉冲的上升时间明显较慢时,测量不确定度可能会增加至 500 ps^[17]。

在对频率信号进行相差测量时,比相设备一般采用公共频率源与输入信号混频产生差拍信号,通过计数器对差拍信号进行过零检测,获得相位差累积值。两个差拍信号产生的脉冲信号形状通常是相似的,另一方面,比相设备也可以采用 A/D 转换的方式替代传统的计数器来获取待测信号与公共频率源的相位差,从而提高测量系统的抗噪能力^[18]。比相设备的测量精度同时受差拍因子和计数器分辨率(或 A/D 量化误差)影响^[19],本次实验所用比相设备的附加不确定度为 5.1×10^{-13} ,测量结果能够准确地反映出被测铯原子钟的频率稳定度,其测量结果可以作为本次实验结果的分析参考。

为了验证 K 折交叉认证方法与 Savitzky-Golay 滤波器结合方法处理原子钟时差测量噪声的有效性,通过 K 折交叉认证确认滤波器参数后,将滤波后的时差数据与相差数据进行了分析和比较,实验流程如图 2 所示。

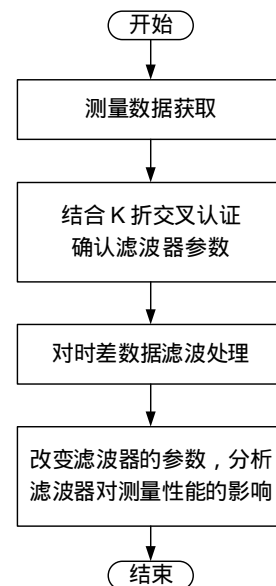


图 2 实验流程图

2.2 原始测量数据

图 3 为相差数据与时差数据的测量结果，由于原子钟的频率信号没有起点，为了清楚表示相差数据和时差数据之间的关系，数据的起始值均调整为 0 ns。图 4 给出了时差与相差数据的局部放大图，时差数据与相差数据的趋势基本相同，但引入更大的测量误差。

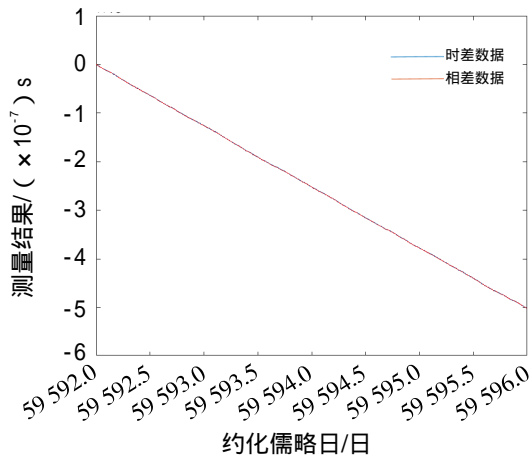


图 3 相差与时差测量结果

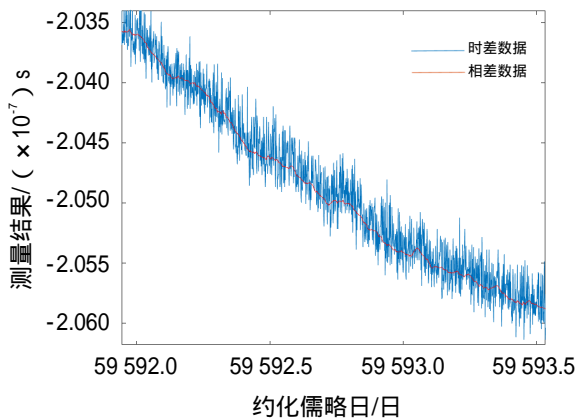


图 4 时差与相差数据局部放大图

相差数据与时差数据的稳定度计算结果见表 1，平均时间为 10 000 s 时，时差数据所获得被测原子钟的频率稳定度为 8.64×10^{-14} ，与比相仪测量的结果 9.24×10^{-14} 略有偏差，但从图 5 可以看到两条曲线基本吻合。平均时间为 1 000 s 时，时差数据反映的该原子钟频率稳定度为 3.51×10^{-13} ，与相差数据的稳定度计算结果 2.70×10^{-13} 相差较大，随着平均时间的缩小，差距进一步加大，说明时差数据的测量结果不能准确地反映被测原子钟中长期以内的频率稳定度。同时，在平均时间为 1 s 时，

时差所得到的稳定度为 2.55×10^{-10} ，远大于比相仪获得的稳定度，可以认为该稳定度主要取决于计数器引入测量噪声，依据式 (5) 便可以估算得到计数器所引入测量噪声的不确定度为 1.47×10^{-10} s。

时域频率稳定度测量时，要求测量仪器引入测量误差的 Allan 方差应小于被测频标 Allan 方差的 1/3。由式 (5) 可知，当被测频标在平均时间为 10 000 s 时的频率稳定度高于 1×10^{-13} 时，该计数器才能准确反映其性能。

表 1 相差与时差数据稳定度计算结果

平均时间/s	时差数据	相差数据	标称指标
1	2.55×10^{-10}	1.66×10^{-12}	5.00×10^{-12}
10	2.55×10^{-11}	1.52×10^{-12}	3.50×10^{-12}
100	2.56×10^{-12}	6.62×10^{-13}	8.50×10^{-13}
1 000	3.51×10^{-13}	2.70×10^{-13}	2.70×10^{-13}
10 000	8.64×10^{-14}	9.24×10^{-14}	8.50×10^{-14}

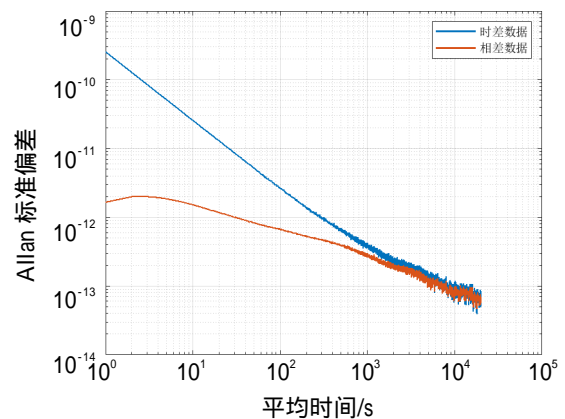


图 5 时差与相差数据的稳定度曲线

2.3 Savitzky-Golay 滤波器参数确定

首先考虑多项式阶数对滤波结果的影响，表 2 给出了通过 10 折交叉互验得到的不同阶数所对应的最佳窗口宽度。图 6 给出了交叉验证误差在不同滤波器阶数下与窗口宽度之间的关系，不同滤波器阶数下的最小交叉验证误差相接近，阶数为 2 时有最小交叉验证误差，对应 M 为 70，也就是窗口宽度为 141。

如图 7 所示，为不同滤波器处理后时差数据的频率稳定度计算结果，在平均时间大于 100 s 时，其稳定度曲线与相差数据的稳定度曲线基本吻合，但平均时间为 10 s 时，滤波后的频率稳定度均优于

相差数据的频率稳定度,说明采用 K 折交叉认证确定的滤波器也会对原始数据造成略微的失真。

表 2 为多项式阶数对应的最佳窗口宽度与滤波残差的标准差计算结果,计算结果均处于 1.47 ns 附近,与 2.2 中 Allan 标准偏差预估的测量噪声不确定度相一致,也说明了时差数据在通过滤波器后能够准确地削弱噪声。

若要满足该原子钟平均时间为 100 s 时频率稳定度测定的需求,设备引入测量噪声的 100 s 稳定度应不超过 6.62×10^{-13} 的 1/3,依据式 (12)

可以得到滤波器的参数 M 和 N 应近似满足: $M/(N+1.03) \geq 20.8$ 。在滤波器阶数小于 5 时, $M/(N+1.03)$ 的比值均满足这一条件,也就说明经过滤波后的时差数据能够较为准确地反映该原子钟平均时间为 100 s 以上的频率稳定度,且不同阶数的比值相接近,滤波器的截止频率相近;阶数等于 5 时,比值为 15.9,不再满足这一条件,相比于其他阶滤波器的截止频率更大,在计算平均时间为 100 s 时的 Allan 标准偏差时引入的测量噪声也就相对较大,为 7.43×10^{-13} ,与真实结果相差最大。

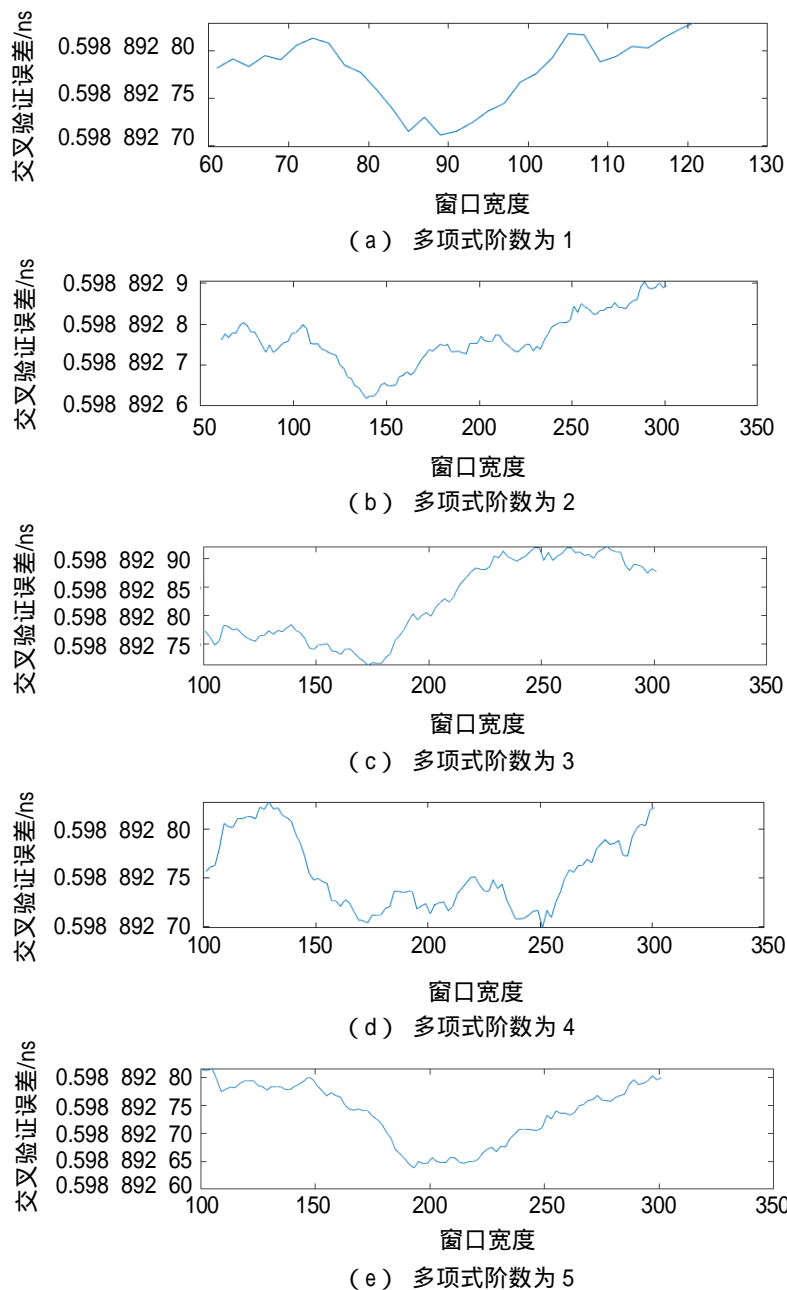


图 6 不同多项式阶数与交叉验证误差

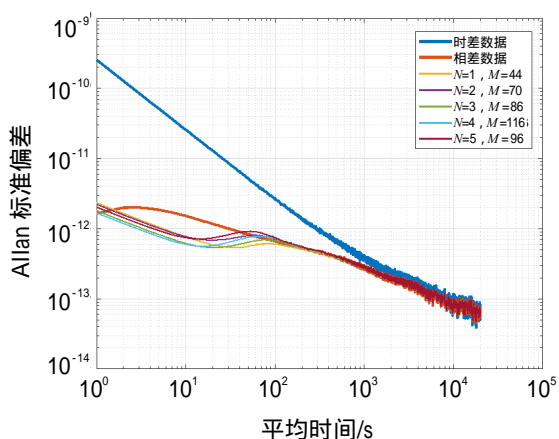


图 7 不同多项式阶数最佳宽度滤波器平滑后的 Allan 标准偏差

表 2 多项式阶数与滤波后残差的标准差

参数	标准差/ns
$N=1, M=44$	1.474
$N=2, M=70$	1.468
$N=3, M=86$	1.472
$N=4, M=116$	1.470
$N=5, M=96$	1.466

为进一步解释滤波器的降噪效果与 Allan 标准偏差之间的关系，对滤波器的窗口宽度进行调节。将多项式阶数固定为 2 时，将窗口宽度分别设置为 121、141、161、181 和 201，计算原始数据经滤波处理后的频率稳定度。如图 8 所示，平均时间为 100 s 以上的 Allan 标准偏差计算结果基本一致且均和真实情况相近，随着窗口宽度的增加，100 s 及以下的 Allan 标准偏差不断减小，说明滤波器对数据造成的失真情况加重。在窗口大小为 181 时，滤波结果的 100 s 稳定度与实际情况最接近，为 6.69×10^{-13} ，但相对于窗口宽度为 121 来说，其 10 s 稳定度的计算结果更加偏离真实情况，说明造成了更严重的失真。

表 3 计算了滤波后与原始数据残差的标准差，随着窗口宽度的增加，残差的标准差也会随之略有上升，从图 9 也可以看出，滤波后残差的标准差和窗口宽度的关系分 3 个阶段，在窗口宽度小于 100 时，标准差快速上升，说明在该阶段滤波

器仅削弱了相位白噪声，对原始信号影响很小，而在窗口宽度大于 160 以后，标准差与窗口宽度呈线性趋势，说明在滤波时更多地扣除了原子钟本身的噪声。

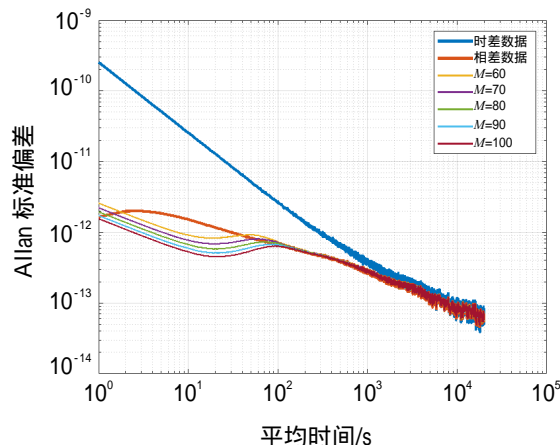


图 8 窗口宽度与 Allan 标准偏差计算结果

表 3 窗口宽度与标准差计算结果

窗口宽度	标准差/ns
121	1.465
141	1.468
161	1.471
181	1.473
201	1.475

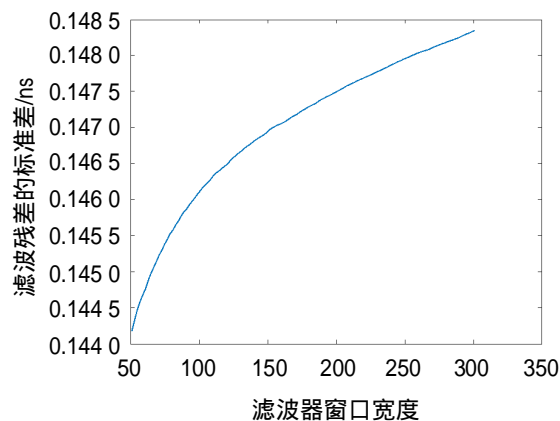


图 9 窗口宽度与残差的标准差计算结果

通过 K 折交叉验证方法确定的滤波器，多项式阶数为 2，窗口长度为 141，能够避免滤波结果过度失真，且准确反映原子钟的短期频率稳定度。

采用该滤波器降噪后的数据如图 10 所示。滤波后的数据与相差数据趋势一致,且均保持在时差曲线的中间部分,准确反映出时差的测量结果,保真效果良好。

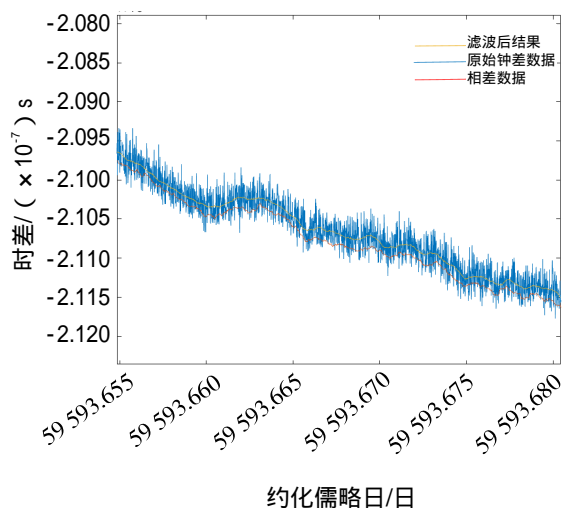


图 10 滤波结果与原始数据对比图

3 总结

计数器在获取原子钟的时差数据时会引入一定的测量误差,对原子钟的中短期稳定度性能评估造成影响。本文以比相仪所获得的高精度时差数据为参考,对计数器测量所引入的误差开展了对比分析,依照 Savitzky-Golay 滤波器的截止频率和滤波器参数之间的关系,结合 K 折交叉验证方法,确定了滤波器的参数,并通过频率稳定度对滤波结果进行了分析。经过滤波后的时差数据可以有效地降低所引入的噪声干扰,平均时间为 100 s 及以上的频率稳定度均与比相仪测量结果相一致,能够准确地反映被测原子钟的短中期稳定度,这为使用时差数据评估原子钟的短期稳定度提供了一种有效方法,在时间保持时,也可以考虑该方法对原始数据进行预处理,以提高时间尺度的短期性能。

参考文献:

[1] 董绍武,王燕平,武文俊,等. 国际原子时及 NTSC 守时工作进展[J]. 时间频率学报, 2018, 41(2): 73-79.
[2] 刘琼瑶. 多通道时间间隔计数器的设计和实现[D]. 西

安: 中国科学院大学(中国科学院国家授时中心), 2019.

- [3] SICCARDI M, ROVERA D, ROMISCH S. Delay measurements of PPS signals in timing systems[C]// 2016 IEEE International Frequency Control Symposium (IFCS), 2016: 1-6.
[4] 赵书红, 广伟, 袁海波, 等. Vondrak 平滑因子最佳确定方法及在时间比对数据中的应用[J]. 时间频率学报, 2015, 38(1): 21-29.
[5] 蔺玉亭, 王晓芳, 白锐锋. 基于小波分析的卫星钟噪声处理方法研究[J]. 测绘, 2009(3): 115-118.
[6] MOSTAFA I, HAMZA G G, ZEKRY A. Using EMD for smoothing atomic clock error in national time scale algorithm[C] // 2019 7th International Japan-Africa Conference on Electronics, Communications, and Computations, 2019: 88-91.
[7] 伍贻威, 杨斌, 肖胜红, 等. 原子钟模型和频率稳定度分析方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(8): 1226-1232.
[8] SONG H J, DONG S W, LI W, et al. Research on the method of noise error estimation of atomic clocktwo[J]. Chinese Astronomy and Astrophysics, 2018, 42(2): 279-290.
[9] RILEY W J. Handbook of frequency stability analysis[K]. Boulder: National Institute of Standards and Technology, 2008.
[10] SAVITZKY A, GOLAY M J E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures[C] // Analytical Chemistry, 1964(36): 1627-1639.
[11] SCHAFER R W. On the frequency-domain properties of Savitzky-Golay filters[C]// 2011 Digital Signal Processing and Signal Processing Education Meeting, 2011: 54-59.
[12] 窦振家, 葛林, 韩琦. 一种基于 Savitzky-Golay 滤波器的航磁校准方法[J]. 智能计算机与应用, 2020, 10(9): 29-32.
[13] 赵安新, 汤晓君, 张钟华, 等. 优化 Savitzky-Golay 滤波器的参数及其在傅里叶变换红外气体光谱数据平滑预处理中的应用[J]. 光谱学与光谱分析, 2016, 36(5): 1340-1344.

- [14] 黄明辉, 李梦云, 代煜. 基于 Savitzky-Golay 算法的某深基坑监测数据降噪处理[J]. 汕头大学学报(自然科学版), 2022, 37(2): 50-60.
- [15] JUNG Y. Multiple predicting K-fold cross validation for model selection[J]. Journal of nonparametric statistics, 2018, 30(1/2): 197-215.
- [16] 李正良, 彭思思, 王涛. 基于 k-fold 交叉验证的代理模型序列采样方法[J]. 计算力学学报, 2022, 39(2): 244-249.
- [17] ROVERA G D, SCICCARDI M, RÖMISCH S, et al. Time delay measurements: estimation of the error budget[J]. Metrologia, 2019, 56(3): 035004.
- [18] 周渭, 李智奇, 白丽娜, 等. 精密时频和数字化测量和处理中的边沿效应及其应用[J]. 时间频率学报, 2022, 45(3): 175-183.
- [19] 刘娅, 李孝辉, 王玉兰. 一种基于数字技术的多通道频率测量系统[J]. 仪器仪表学报, 2009, 30(9): 1963-1968.