

引用格式: 胡珍源, 杨西光, 张攀, 等. 最大时间间隔误差与 Allan 方差关系研究[J]. 时间频率学报, 2024, 47(3): 229-234.

最大时间间隔误差与 Allan 方差关系研究

胡珍源^{1,2,3}, 杨西光^{1,2,3}, 张攀^{1,2,3}, 张首刚^{1,3}

- 中国科学院 国家授时中心, 西安 710600;
- 中国科学院大学, 北京 100049;
- 时间基准及应用重点实验室(中国科学院), 西安 710600

摘要: 最大时间间隔误差和 Allan 方差都是常用于对时间频率信号生成与传递系统进行分析或评价的统计量。在有些应用中, 测量最大时间间隔误差较测量 Allan 方差更为方便。为了确定一个信号的最大时间间隔误差和 Allan 方差之间是否存在一定的统计关系以及是否可以通过最大时间间隔误差对 Allan 方差做出估计, 介绍了最大时间间隔误差和 Allan 方差的数学定义, 通过数学分析推导, 得到了最大时间间隔误差与 Allan 方差之间不能直接换算, 而最大时间间隔误差一定时 Allan 方差存在上限。该关系对不同取样时间都成立。对幂律谱模型中常见的 5 种噪声类型, 使用计算机程序生成每种噪声条件下的数值数据, 对这一关系做了验证。数学推导计算和数值数据验证都表明: 根据数据的最大时间间隔误差可以确定其 Allan 方差的上限。

关键词: Allan 方差; 最大时间间隔误差; 噪声

DOI: 10.13875/j.issn.1674-0637.2024-03-0229-06

A study of relationship between the maximum time interval error and Allan variance

HU Zhen-yuan^{1,2,3}, YANG Xi-guang^{1,2,3}, ZHANG pan^{1,2,3}, ZHANG Shou-gang^{1,3}

- National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;
- University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;
- Key Laboratory of Time Reference and Applications, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China

Abstract: The maximum time interval error (MTIE) and the Allan variance are commonly used to analyze or evaluate time-frequency signal generation and transmission systems. In some applications, measuring the maximum time interval error is more convenient than measuring Allan variance. To find whether there is a definite statistical relationship between them or whether it is possible to estimate the Allan variance via the maximum time interval error, we performed mathematical analysis and derivation. The results show that while direct conversion between them is impossible, an upper limit of the Allan variance exists for a fixed maximum time interval error, which holds for different sampling times. This relation is verified with the specific data

收稿日期: 2023-05-13; 接受日期: 2023-06-18

基金项目: 国家重点研发计划(2020YFA0309801); 中国科学院战略性先导 B 类(XDB35030101)

generated by the computer program under five noise patterns in the Power Law Noise Model. Both derivation and data verification show that the upper limit of the Allan variance can be determined according to the maximum time interval error of the sampled data.

Key words: Allan variance; maximum time interval error (MTIE); noise

近年来,随着原子钟性能的不断提高,对时间频率传递系统性能的要求也相应提高。时间频率传递系统的性能,可以用信号的频率稳定度在经过传递前后的变化,即附加不稳定性来描述。附加不稳定性反映的是传递系统的噪声水平。

当前的时频传递系统是以电信号或光信号作载波来传递时间频率信号的,由于载波速度有限(不超过光速),所有传递系统都存在一个传递时间延迟量,该延迟量会因传递系统所在环境温度变化等因素影响而变化。传递时间延迟的变化会影响所传递信号的频率稳定度^[1]。在一定时间内延迟量变化的最大范围可以用信号的最大时间间隔误差表示。

由于频率源输出信号中所包含的调频闪烁噪声和频率随机游走噪声属于非平稳噪声过程,因此利用传统的标准方差来描述频率稳定度不能保证它的收敛性。所以,在 IEEE 标准中所定义的时域稳定度统计方法中,Allan 方差已成为表征频率源信号稳定度的一种有用手段^{[2][21]}。而进行时间频率传递时,可以使用时间延迟变化来评价传递系统的性能。时间延迟变化可以通过时间方差(TVAR)、最大时间间隔误差(maximum time interval error, MTIE)或者时间间隔误差(TIE)等统计值来进行表征。MTIE 的定义,最早是为了评估钟信号相位变化的最大范围,为正确设计通信系统存储缓冲器的大小提供支持^[3]。在设计时间频率传递系统时,系统中的传输时间延迟变化(信号相位抖动)可以直接使用导线或者光纤的长度变化表示,延迟变化范围对应的是 MTIE 统计值,使用 MTIE 可以对各个传递阶段进行性能评估,并可通过定义得到系统的 MTIE 不超过其各部分的 MTIE 的和。已有研究分析了 MTIE 测量与钟稳定性在远距离通信中的关系^[4-5],通过 Allan 方差对 MTIE 进行估计,给出了在调相白噪声条件下^[6]和调频白噪声条件下^[7]通过 Allan 方差估计 MTIE 取

值范围所对应概率的经验值,并进行了数值计算^[8]。近年来,MTIE 仍在一些研究当中被用作分析工具或评价系统性能^[9-12]。在有些工程应用中,例如空间站上从舱内到舱外的频率信号传递,可以测量传递系统的时间延迟的最大变化得到 MTIE,但频率信号经过传递前后的 Allan 方差难以测量,使用 MTIE 能够对传递系统性能给出直接约束和评价。然而,MTIE 和 Allan 方差的统计关系并没有被完全确定。本文从 MTIE 和 Allan 方差的定义出发,得到可以通过 MTIE 确定 Allan 方差的上限。

1 数学分析及推导

时域稳定性分析的基础是一个等间隔相位(实际时间误差)数组或者差分频率偏差数据数组,将其分别用 x_i 和 y_i 表示,其下标 i 指数据点, x_i 和 y_i 相互之间可以转换。 x_i 的单位是秒, y_i 的值是无量纲的差分频率 $\Delta f/f$ 。 $x(t)$ 的时间波动与相位波动相关。 $\phi(t) = x(t) \times 2\pi\nu_0$,其中 ν_0 是载波频率,单位为 Hz。 $\phi(t)$ 与 $x(t)$ 两者通常都被称为“相位”,以区别于独立的时间变量 t ^[13]。

MTIE 的定义为在一个测量周期内,一个给定的窗口内的最大相位变化^{[2][25]}:

$$MTIE(\tau) = MTIE(n\tau_0) = \max_{1 \leq k \leq N-n} \left[\max_{k \leq i \leq k+n} (x_i) - \min_{k \leq i \leq k+n} (x_i) \right] \quad (1)$$

式(1)中, \max 表示求最大值, \min 表示求最小值, $\{x_i\}$ 为取样间隔(数据采集或测量的间隔)为 τ_0 的时间误差函数 $x(t)$ 的 N 个取样数的一个取样序列, $\tau = n\tau_0$ 是一个取样时间(数据分析的间隔或周期,也称平均时间), $n = 1, 2, \dots, N-1$ 。

Allan 方差定义^[14]为频率数据一阶差分平方的无限平均的一半:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (y_{i+1} - y_i)^2 \rangle \quad (2)$$

式(2)中, y_i 表示第 i 个差分频率,取样时间为

τ ，“ $\langle \rangle$ ”表示无限时间平均。Allan 方差通常用式 (3) 进行估计：

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-2)\tau^2} \sum_{i=1}^{N-2} (x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)^2 \quad (3)$$

式(3)中， x_i 表示第*i*个相位数值，取样时间为 τ 。

按照 MTIE 和 Allan 方差的定义，假设频率信号是理想稳定信号，则 x_i 为固定值 x_0 ，MTIE 和 Allan 方差都为 0。

一组相位测量数据可以看作是一个给定的一维数组。可以把数组长度记为 N ，能够证明，对于 $n \in N$ 随着 n 取值的增大， $MTIE(n\tau_0)$ 是单调递增的。对于一个给定的一维数组， τ_0 一定，随着 n 增大， $n\tau_0$ 增大，在窗口长度 n 为 $N-1$ 时， $MTIE(n\tau_0)$ 最大值。假设一种条件：在一组数据中，除中间某一点的数值为 $x_0 + x_e$ 以外，其余所有点的数值全部为 x_0 ，此时：

$$MTIE(n\tau_0) = x_e \quad (4)$$

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{6x_e^2}{2(N-2)\tau^2} \quad (5)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} MTIE(n\tau_0) = x_e \quad (6)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_y^2(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{6x_e^2}{2(N-2)\tau^2} = 0 \quad (7)$$

即在单次相位跳变情况下，随着取样序列 N 增长，MTIE 由该次跳变的幅度决定，而 Allan 方差的值趋向于 0。以上所假设的单次相位跳变条件是一种理想条件，该情况下的计算结果表明：已知 MTIE，不能约束 Allan 方差的下限；而已知 Allan 方差，不能约束 MTIE 的上限。那么在已知 MTIE 时，Allan 方差是否存在上限？

已知 $MTIE(\tau)$ ，则对任意 $|p-q| \leq n$ 有：

$$-MTIE(\tau) \leq x_p - x_q \leq MTIE(\tau) \quad (8)$$

$$|x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i| \leq |x_{i+2n} - x_{i+n}| + |x_{i+n} - x_i| \leq 2MTIE(\tau) \quad (9)$$

$$(x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i)^2 \leq 4MTIE^2(\tau) \quad (10)$$

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\left(\frac{N}{n}-2\right)\tau^2} \sum_{i=1}^{\frac{N}{n}-2} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i)^2 \leq$$

$$\frac{1}{2\left(\frac{N}{n}-2\right)\tau^2} \left(\frac{N}{n}-2\right) \times 4MTIE^2(\tau) = \frac{2MTIE^2(\tau)}{\tau^2} \quad (11)$$

$$\text{即：} \sigma_y^2(\tau) \leq \frac{2MTIE^2(\tau)}{\tau^2} \quad (12)$$

$\sigma_y(\tau)$ 与 $MTIE(\tau)$ 都为正值，可写作：

$$\sigma_y(\tau) \leq \frac{\sqrt{2}MTIE(\tau)}{\tau} \quad (13)$$

仅在式 (9) 取等号，即 $|x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i| = 2MTIE(\tau)$ 对任意 i 都满足，数值一直交替变化时，式 (10)~(13) 中的小于等于号可以取等号，对应一个确定的 MITE 可以取得最大的 Allan 方差。

以上计算表明，一个频率信号在其 MTIE 确定时，其 Allan 方差存在最大值；在其 Allan 方差确定时，其 MTIE 存在最小值。注意到式 (9) 取等号的条件是一个理想条件，该条件下对于取样时间 2τ 有 $\sigma_y(2\tau) = 0$ ；实际中该条件难以达到。式 (12) 只在某一个取样时间下 Allan 方差可能的最大值，而实际的数据计算中，所有取样时间的 $\sigma_y^2(\tau)$ 都达不到 $\frac{2MTIE^2(\tau)}{\tau^2}$ 。以上计算的取样时间没有特别约束，故对任意取样时间 τ ，都符合式 (12)~(13) 结果。式 (12)~(13) 给出的是完全不考虑噪声类型的结果。实际中，频率信号的随机噪声可以用幂律谱模型来表征。该模型通常包括 5 种^[15]独立的噪声模型，依次为频率随机游走噪声、调频闪烁噪声、调频白噪声、调相闪烁噪声和调相白噪声，它们呈线性叠加关系^{[2]17}。在不考虑噪声类型时推出的结果，应当适用于任意一种噪声类型的条件。为了验证在各种类型噪声的条件下都能满足式 (12)~(13) 的结果，使用程序生成符合条件的数据并进行了计算。

2 数据验证

使用 Stable32(Ver1.67) 程序按不同的噪声类型生成数据并进行计算。

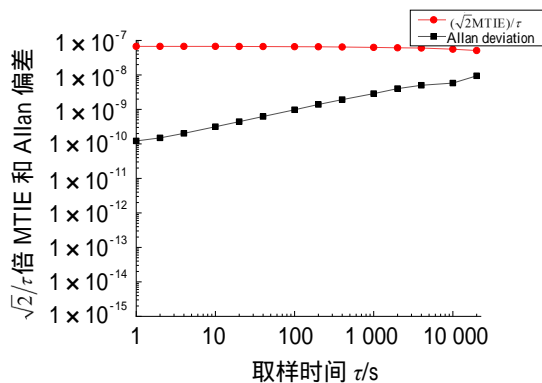
该程序支持使用幂律谱模型对噪声进行分析。可以由用户设置噪声的类型、强度、数据量等参数

生成对应的仿真相位数据或频率数据。

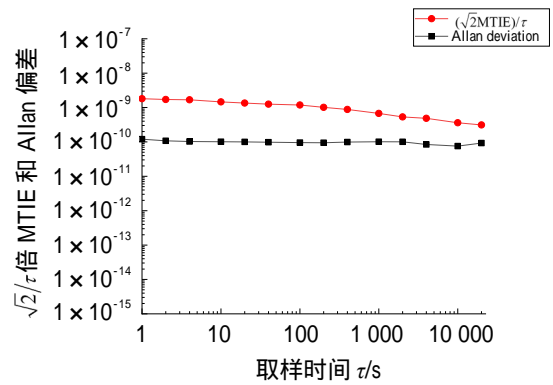
运行程序生成 5 组数据，每组数据分别对应一种噪声类型，分别为频率随机游走噪声、调频闪烁噪声、调频白噪声、调相闪烁噪声、调相白噪声。设置噪声参数为 1^{-10} (噪声参数定义为 $\tau=1$ 的 Allan 偏差)，每组数据的长度设置为 102 400 个数据点，该数据长度支持程序计算取样时间 τ 为 20 000 s 的 Allan 偏差。对这 5 组数据分别计算其 Allan 偏差和 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE。其具体计算结果见图 1。

图 1 中各图分别为不同噪声条件的计算结果。图中横坐标为取样时间 τ ，纵坐标为 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 和 Allan 偏差计算值，坐标轴选用对数刻度，红色图线是 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE，黑色图线是 Allan 偏差。根据设置的噪声参数，各种噪声条件下 Allan 偏差的值在 1 s 时约为 1×10^{-10} ，Allan 偏差与取样时间 τ 之间的斜率特性也与幂律谱模型理论符合。对于 5 种噪声类型的计算结果，Allan 偏差计算结果都小于对应的 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE，即满足式 (13)。

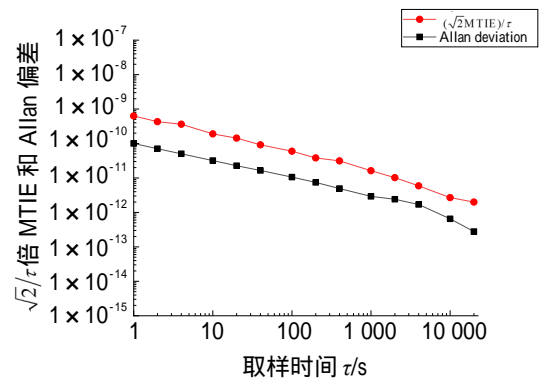
图 1(a) 中频率随机游走噪声条件下的 Allan 偏差变化趋势随取样时间 τ 的增大而增大，斜率为 $\sqrt{\tau}$ ，而 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 随着 τ 的增大有下降趋势，照此情形，在 τ 增大到一定值时似乎 Allan 偏差会超过 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE。然而实际计算中，获得更大取样时间 τ 的 Allan 偏差需要更多的数据参与计算，在频率随机游走噪声条件下，MTIE 在同样取样时间 τ 处的值会随着数据量的增大而增大，从而使得 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 增大。通过对不同长度的数据作验证计算，在不同取样时间 τ 下，计算结果仍然满足式 (13)。



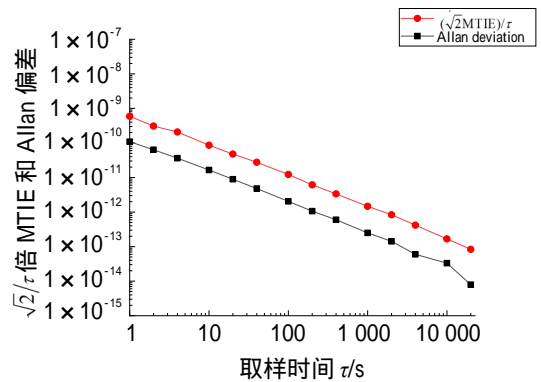
(a) 频率随机游走噪声条件



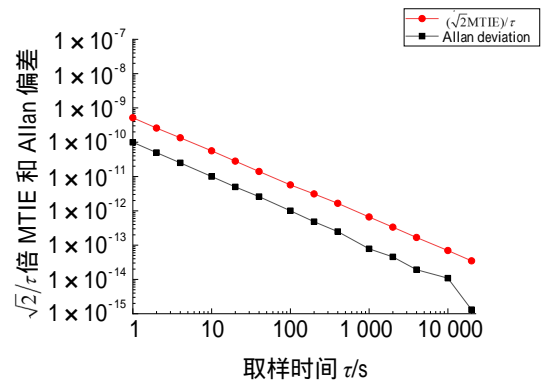
(b) 调频闪烁噪声条件



(c) 调频白噪声条件



(d) 调相闪烁噪声条件



(e) 调相白噪声条件

图 1 不同噪声条件下的 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 和 Allan 偏差计算结果

3 讨论

通过计算，对于具有不同类型噪声的频率信号，其 Allan 偏差与 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 的比值随取样时间 τ 的变化趋势是不同的，计算不同条件下的比值随取样时间变化的值，得到如图 2 所示曲线。

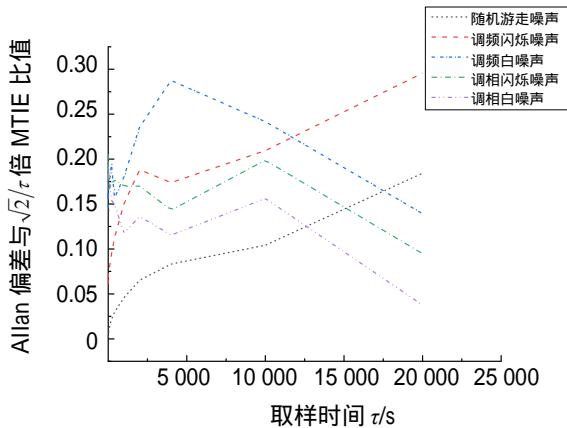


图 2 不同噪声类型信号 Allan 偏差与 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 比值随取样时间变化趋势

图 2 中横坐标为计算数据的取样时间，纵坐标为 Allan 偏差与 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 的比值，黑红蓝绿紫颜色线条分别对应频率随机游走噪声、调频闪烁噪声、调频白噪声、调相闪烁噪声和调相白噪声的噪声条件。5 种类型噪声信号的 Allan 偏差与 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 的比值随着取样时间 τ 的变化而变化，而一直持续小于 1；对于不同类型的噪声，Allan 偏差与 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 的比值随取样时间 τ 的变化趋势有不同：频率随机游走噪声和调频闪烁噪声的 Allan 偏差与 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 的比值随取样时间 τ 的增大而增大，而调频白噪声、调相闪烁噪声和调相白噪声的 Allan 偏差与 $\sqrt{2}/\tau$ 倍 MTIE 的比值随取样时间 τ 的增大而减小。

对不同类型噪声的频率信号，当其取得相同的 MTIE，对应的 Allan 偏差是不同的。对于一个频率信号，在其噪声类型未知的条件下，无法仅通过 MTIE 对其 Allan 偏差做出准确估计。而在信号的噪声类型已知的条件下，通过 MTIE 估计不同概率条件下 Allan 偏差是可能的。

例如当噪声类型是频率随机游走噪声时：

设频率数据 y_i 服从随机游走分布，取样序列长度为 N ，取样序列间隔为 τ_0 ，且该随机游走分布

初始位置记为 0，强度记为 σ^2 ，根据随机游走的定义，则 y_i 的均值为 0，方差为 $i\sigma^2$ 。

根据随机游走分布的定义得到 $y_{i+1} - y_i$ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ ， $y_{i+n} - y_i$ 服从正态分布 $N(0, n\sigma^2)$ ：

$$E[(y_{i+n} - y_i)^2] = n\sigma^2. \tag{14}$$

在 N 足够大时，计算 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$ 在平均时间 $\tau = n\tau_0$ 的 Allan 方差和 Allan 偏差，为：

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{\frac{N}{n} - 1} \sum_{i=1}^{\frac{N}{n}-1} (y_{i+n} - y_i)^2 = n\sigma^2, \tag{15}$$

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{n}\sigma. \tag{16}$$

另外，根据中心极限定理，在 N 足够大时， y_i 趋近于正态分布。由于最大值和最小值是所有数据的极差，它不受分布的影响，因此，可以通过 y_i 中的最大值和最小值的差来估计 σ 。如果 MTIE 已知，即相位数据最大变化已知，可以得到频率变化范围不超过 $\pm \frac{MTIE(\tau)}{\tau}$ 。

y_i 的分布接近于正态分布，可以使用标准正态分布的性质来估计最大值和最小值的差：

$$P\left[\max(y_1, y_2, \dots, y_N) - \min(y_1, y_2, \dots, y_N) \leq \frac{2MTIE(\tau)}{\tau}\right] \approx \Phi\left(\frac{2MTIE(\tau)}{\sqrt{N\sigma^2\tau}}\right) - \Phi\left(-\frac{2MTIE(\tau)}{\sqrt{N\sigma^2\tau}}\right). \tag{17}$$

式 (17) 中， \max 表示求最大值， \min 表示求最小值， $\Phi(x)$ 是标准正态分布的累积分布函数。根据式 (17)，可以得到 σ 的估计值为：

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{4MTIE^2(\tau)}{N\tau^2 \left[\Phi^{-1}\left(\frac{P+1}{2}\right)\right]^2}}. \tag{18}$$

式 (18) 中， $\Phi^{-1}(x)$ 是标准正态分布的累积分布函数的逆函数，可以通过计算或查标准正态分布累积概率函数表的方式来得到数值解， P 表示 σ 取某估计值时对应的频率变化最大值不超过 $\frac{2MTIE(\tau)}{\tau}$ 的概率。由此，噪声类型是频率随

机游走噪声时，可以通过 MTIE 的值来估计 Allan 偏差。实际应用中，影响信号的噪声常常是几种不

同类型噪声的叠加,不同情况下各种类型噪声的强度也各不相同,故通过 MTIE 对 Allan 偏差给出估计值仍存在困难,计算时可以用式(12)或式(13)给出的结果。

4 结语

从 Allan 方差和 MTIE 的定义出发,分析计算了这两种统计量之间的数学关系,得到可以由一个频率信号的 MTIE 确定其 Allan 方差上限的结论。使用计算机程序按照幂律谱模型中的常见的 5 种类型噪声生成的数据做了数值计算验证,数值计算结果支持数学推导得到的结论。

MTIE 可以确定 Allan 方差的上限,在设计时频传递系统时,可以通过约束 MTIE 的方式对 Allan 方差进行约束,由此可以预计用 Allan 方差表征的系统性能。这种方式不必对系统或部件进行测试获得其 Allan 方差,而是直接通过设计其时间延迟量的变化范围来保证其性能,例如可以在光纤时频传递系统中通过干涉测量等手段获得传递路径上的 MTIE,进而换算为传递路径附加噪声的 Allan 方差的上限,为工程应用中设计指标的分解和系统性能的评估带来方便。

参考文献:

- [1] 江少平,张浩,姜文宁,等.链路时延波动对光纤时间传递稳定性的影响[J].激光与光电子学进展,2016,53(4):45-51.
- [2] 李孝辉,杨旭海,刘娅,等.时间频率信号的精密测量[M].北京:科学出版社,2010.
- [3] TAVELLA P, GODONE A, LESCHIUTTA S. The range covered by a random process and the new definition of MTIE[C]//Proceedings of the 28th Precise Time and Time Interval Meeting, Reston: [s.n.], 1996: 119-124.
- [4] BREGNI S. Measurement of maximum time interval error for telecommunications clock stability characterization[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement, 1996, 45(5): 900-906.
- [5] BREGNI S. Clock stability characterization and measurement in telecommunications.[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement, 1997: 46(6): 1284-1294.
- [6] BREGNI S, TAVELLA P. Estimation of the percentile maximum time interval error of gaussian white phase noise[C] // IEEE International Conference on Communications, Montreal: IEEE, 1997: 1597-1601.
- [7] TAVELLA P, MEO D. The range covered by a clock error in the case of white FM[C] // 30th Annual Precise Time and Time Interval Meeting, Reston: [s.n.], 1998: 49-60.
- [8] 宋会杰,董绍武,李玮,等.原子钟噪声误差估计方法研究[J].天文学报,2017,58(3):1-10.
- [9] SUISSA G, PINCHAS M. A new equalization performance analyzing method for blind adaptive equalizers inspired by maximum time interval error[J]. Journal of Signal and Information Processing, 2017(2): 42-64.
- [10] 樊多盛,刘娅,李孝辉,等.基于卫星共视的钟驾驭方法研究[J].时间频率学报,2018,41(4):300-306.
- [11] PROKOFIEV O V, SAVOCHKIN A E. Additive noise effect on the error of time interval forming[C] // 2020 Global Smart Industry Conference, Chelyabinsk: [s.n.] Federation, 2020: 255-258.
- [12] CH D, XU J N, LI Z Z, et al. Optical fiber time transmission technology based on a double-fiber round-trip method[J]. Applied Optics, 2021, 60(24): 7504-7510.
- [13] RILEY W J. Handbook of Frequency Stability Analysis[M]. Washington: NIST Special Publication, 2008.
- [14] BARNES J A, CHI A R, CUTLER L S, et al. Characterization of frequency stability[J]. Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on, 2017(28): 105-120.
- [15] RUTMAN J, WALLS F L. Characterization of frequency stability in precision frequency sources[J]. Proceedings of the IEEE, 1991, 79(7): 952-960.