

引用格式: 张哲浩, 童明雷. 脉冲星-原子时联合守时中两种稳定度评估量的比较[J]. 时间频率学报, 2025, 48(2): 109-120.

脉冲星-原子时联合守时中 两种稳定度评估量的比较

张哲浩^{1, 2, 3}, 童明雷^{1, 2, 3†}

1. 中国科学院 国家授时中心, 西安 710600;
2. 时间基准及应用重点实验室(中国科学院), 西安 710600;
3. 中国科学院大学, 北京 100049

摘要: 随着脉冲星时间科学的发展, 脉冲星时与原子时联合守时成为脉冲星时应用研究的前沿, 这一领域需要统一的稳定度评估方法。为了研究评估脉冲星时稳定度的 σ_z 偏差与对应评估原子时稳定度的 σ_H 偏差之间的关系, 通过时域与频域两个角度的理论分析, 揭示了两种偏差的异同, 并根据频域中两种偏差频率响应间的关系重新推导了 σ_z 偏差的系数。分析表明, 两种评估量都适合于分析具有频率线性漂移数据的稳定度, 且适用于相同的低频幂律噪声。与 σ_H 相比, σ_z 只对低频噪声响应。根据频率响应间的关系推导得到的 σ_z 系数与定义值相比略微偏大。最后通过对模拟数据的稳定度评估, 对比了两种评估方法的效果。

关键词: 脉冲星时; 原子时; 稳定度评估量

DOI: 10.13875/j.issn.1674-0637.2025-02-0109-12

The comparison of two stability evaluation methods for pulsar time scale and atomic time scale joint time keeping

ZHANG Zhe-hao^{1,2,3}, TONG Ming-lei^{1,2,3†}

1. National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;
2. Key Laboratory of Time Reference and Applications, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;
3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract: With the development of pulsar time science, the combination of pulsar time scale and atomic time scale has become a research frontier of pulsar time scale applications. In this field, there is a demand for unified stability evaluation method. In order to study the relation between σ_z deviation for pulsar time scale and corresponding σ_H deviation for atomic time scale, the theoretical analysis in time domain and frequency domain are conducted and the similarities and differences between σ_z and σ_H are revealed. The coefficient of σ_z is re-deduced based on the relation of frequency response of the two deviations. According to the analysis,

收稿日期: 2024-07-19; 接受日期: 2024-09-13; †: mltong@ntsc.ac.cn

基金项目: 中国科学院战略先导科技专项(A类)(XDA0350502); 科技部 SKA 专项(2020SKA0120103); 国家自然科学基金(U1831130)

both statistics are suitable for the stability evaluation of data with linear frequency drift and they are suitable for the same power law noise. Compared with σ_H , σ_z only responds to low frequency noise, and its coefficient deduced by the relation of frequency responses is a little larger than the defined value. Finally, the effects of two evaluation methods are compared by estimating the stability of simulated data.

Key words: pulsar time scale; atomic time scale; stability statistic

Hadamard 方差 (记为 σ_H^2) 是常用的原子时稳定度评估量, 其定义可参见文献^[1]。通常使用的 Hadamard 方差通过相位数据的三阶差分 (或频率数据的二阶差分) 实现, 因差分结果不受频率线性漂移的影响, 故适合铷钟、氢钟等频率源的稳定度分析。毫秒脉冲星作为高速自转的致密星, 在不断向外辐射能量的过程中自转频率也在系统地线性减小, 但脉冲星观测数据不具有等间隔性, 因此不能直接使用 σ_H 评估其稳定度。20 世纪 90 年代, Taylor^[2]及 Matsakis^[3]等人先后提出了脉冲星时稳定度评估量 σ_z , 该评估量使用三次多项式近似表示残差的变化, 并利用多项式的三次系数评估稳定度大小。随着脉冲星时间科学的不断发展, 脉冲星时已经从单独的时间尺度研究逐渐走向与原子时联合, 典型的代表是脉冲星时与原子时融合成纸面时间^[4-5], 以及使用脉冲星计时对原子时进行频率校正^[6]。在这些应用中, 脉冲星时与原子时的稳定度评估不再是独立的工作, 寻求统一的评估方法是这一领域研究的迫切需求。由于原子时领域一般并不使用 σ_z , 如果能够找出 σ_z 与 σ_H 间的特定关系, 就解决了联合守时中的稳定度评估问题。本文的目的就是分析比较这两种评估量的异同, 并寻找两者间关系。

Matsakis 等人在给出 σ_z 的计算方法时, 并未系统地提到该评估量所涉及的理论根源, 这对分析比较 σ_z 与 σ_H 的性质是不够的。本文从稳定度评估的原理出发, 给出了 σ_z 涉及到的时域与频域特性。文章的结构安排如下。第 1 节介绍稳定度评估的基本概念以及 σ_z 、 σ_H 两种偏差的定义。第 2 节从时域与频域两个角度分析两种偏差的异同, 并讨论建立联系的可能性。第 3 节简要总结本文的基本结论。

1 基本概念

本章介绍稳定度评估的基本概念与 σ_z 、 σ_H 的

定义。

1.1 稳定度评估的基本概念

在时间频率领域, “稳定度” 这一术语的含义有时与其字面意义并不相同, 通过稳定度评估量 (各种方差) 给出的数值 (通常称为 “稳定度”) 反映的其实是时间频率信号的不稳定程度, 因此, 在具体问题中应根据上下文正确理解其含义。通常, 频率源输出的信号被表示为含参变量的正弦波^[1]

$$V(t) = [V_0 + \varepsilon(t)] \sin[2\pi\nu_0 t + \Phi(t)]。 \quad (1)$$

式 (1) 中, V_0 与 ν_0 分别表示标称振幅与标称频率, $\varepsilon(t)$ 与 $\Phi(t)$ 分别反映振幅与相位的波动。频率噪声被表示为

$$\Delta\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}。 \quad (2)$$

式 (2) 中 $\phi(t)$ 为 $\Phi(t)$ 的随机成分。瞬时频率偏差被定义为

$$y(t) = \frac{\Delta\nu(t)}{\nu_0} = \frac{dx(t)}{dt}。 \quad (3)$$

式 (3) 中

$$x(t) = \frac{\phi(t)}{2\pi\nu_0}。 \quad (4)$$

式 (3) 和 (4) 中的 $x(t)$ 称为瞬时时间偏差。电气及电子工程师协会 (Institute of Electrical and Electronics Engineers, IEEE) 时频技术委员会频率稳定度分委会 (以下简称 IEEE 分委会) 将频域中的稳定度定义为单边功率谱密度^[1]

$$S_y(f) = \begin{cases} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau, & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}。 \quad (5)$$

式 (5) 中 $R_y(\tau)$ 为宽平稳随机过程 $y(t)$ 的相关函数, 即为

$$R_y(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)]。 \quad (6)$$

相应地也可给出频域中相位稳定度的概念——相

位数据谱密度。

时域中，通过计数装置求出平均频率

$$\bar{y}_k = \frac{\phi(t_k + \tau) - \phi(t_k)}{2\pi\nu_0\tau}。 \quad (7)$$

IEEE 分委会将稳定度定义为^[1]

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} E[(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2]。 \quad (8)$$

式(8)中的 $\sigma_y^2(\tau)$ 即 Allan 方差。将式(8)中的平均频率 y 替换为瞬时时间偏差 x ，Allan 方差变为相位数据二阶差分的形式

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} E[(x(t_1 + 2\tau) - 2x(t_1 + \tau) + x(t_1))^2]。 \quad (9)$$

实际计算中，假定 x 满足各态历经性，就得到 Allan 方差的估计式

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2 n} \sum_{i=1}^n (x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)^2。 \quad (10)$$

由于 Allan 方差在稳定度评估中的基础作用，对其他稳定度评估量的分析常需要与 Allan 方差进行比较。

稳定度的时域与频域评估量可通过传递函数建立联系。记 $x(t)$ 为观测数据，一般意义下，时域方差 σ^2 通过采样函数 $h(t)$ 求出^[7]

$$\sigma^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)x(t)dt \right]^2。 \quad (11)$$

对式(11)求数学期望，并假设 $x(t)$ 是平稳随机过程，得到

$$E[\sigma^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 S_x(f) df。 \quad (12)$$

式(12)中， $H(f)$ 是传递函数（ $h(t)$ 的 Fourier 变换）， $S_x(f)$ 是 $x(t)$ 的功率谱密度。式(12)指出一个重要事实：由式(11)定义的方差的期望是使用 $|H(f)|^2$ （频率响应）对 $S_x(f)$ 采样的结果。式(12)的意义在于建立了时域与频域中稳定度评估量的关系，并给出了从频域分析时域方差特性的途径。例如，假设 $x(t)$ 的功率谱密度满足 $S_x(f) \sim f^{-\alpha}$ （ $\alpha > 0$ ），且 σ^2 对该噪声收敛，根据积分理论， $|H(f)|^2$ 至少应以 $f^{\alpha-1}$ 的速度收敛到0，一个等价的条件是 $h(t)$ 满足矩条件^[7]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)t^k dt = 0, 0 \leq k \leq \frac{\alpha-1}{2}。 \quad (13)$$

此条件利用 $H(f)$ 的连续性可以证明。

1.2 σ_H 与 σ_z 的定义

使用最广泛的 Hadamard 方差由相位数据的三阶差分（或频率数据的二阶差分）定义，对相位数据，其估计式为

$$\sigma_H^2(\tau) = \frac{1}{6\tau^2 n} \sum_{i=1}^n (x_{i+3} - 3x_{i+2} + 3x_{i+1} - x_i)^2。 \quad (14)$$

因三阶差分消去了相位数据中的二次趋势，因此式(14)常被用于含有频率线性漂移的信号源稳定度评估，如氢原子钟。可求出式(14)所表示方差的采样函数，传递函数与频率响应分别为

$$\begin{cases} h_{\sigma_H^2}(t) = \delta(t-3\tau) - 3\delta(t-2\tau) + 3\delta(t-\tau) - \delta(t) \\ H_{\sigma_H^2}(y) = 1 - 3e^{-iy} + 3e^{-2iy} - e^{-3iy} \\ |H_{\sigma_H^2}(y)|^2 = 64 \sin^6 \frac{y}{2} \end{cases}。 \quad (15)$$

这里，本文使用 $y = \omega\tau = 2\pi f\tau$ 简化传递函数与频率响应的表达式。从式(15)最后一个式子可知，Hadamard 方差对于满足谱指数 $\alpha > -7$ 的幂律噪声（谱密度 $S_x(f) \sim f^\alpha$ ）都是收敛的（当 $\alpha \geq -1$ 时需考虑截止频率 f_h ，参考文献[1]）。

在某些方面， σ_z 与 σ_H 具有相似性。 σ_z 的估计式为^[2]

$$\sigma_z(\tau) = \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}} \langle c_3^2 \rangle^{1/2}。 \quad (16)$$

式(16)中， $\langle \rangle$ 表示加权平均，权重根据 c_3 的估计误差取值， c_3 是拟合长度为 τ 的相位数据的多项式式(17)的三次项系数（ t_0 为任意常数）。

$$X(t) = c_0 + c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)^2 + c_3(t-t_0)^3。 \quad (17)$$

因此， σ_z 同样略去了观测数据中的频率偏差与频率漂移。由于频率偏差与频率漂移在脉冲星时中是无意义的系统误差，从这一角度， σ_z 与 σ_H 都可用于脉冲星时的稳定度评估。

σ_z 与 σ_H 的计算方法不同。 σ_H 与原子时其他常用评估量一样，要求被评估数据满足等间隔分布，计算时从最小间隔 τ_0 起，通常采用幂律递增的方式 $\tau_0, 2\tau_0, 4\tau_0, \dots$ ，计算相应尺度下的稳定度。 σ_z 则为非等间隔数据设计，计算时从最大数据长度 T 开始，一般以幂律递减的方式得到 $T, T/2, T/4, \dots$ 尺度下的稳定度（需要通过判定规则确定有效区间）。

2 σ_z 与 σ_H 的关系

从定义式 (14) 与式 (16) 可以立即看出, σ_z 与 σ_H 的一个明显不同是两者所定义的稳定度时间尺度(即稳定度数值对应的时间间隔)。对长度为 T 的数据, σ_H 给出 $\tau=T/3$ 的稳定度, 而 σ_z 给出 $\tau=T$ 的稳定度。因此, 在比较两种评估量的效果时, 首先需要将 σ_z 的时间坐标缩减 3 倍。图 1 是 σ_z 与 σ_H 对 MJD 50 009~59 579 区间内钟差 TT (BIPM21) - TAI 数据的稳定度计算结果, 可看出两条曲线在时间坐标上的明显差异。

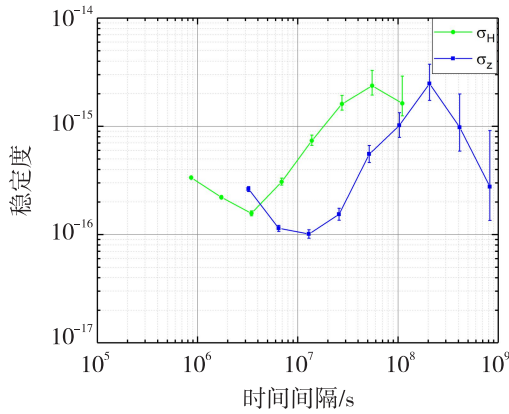


图 1 σ_H 与 σ_z 对 TT (BIPM21) - TAI (MJD50 009~59 579) 的评估差异

2.1 σ_H 与 σ_z 的比较

为了系统地分析两种偏差的关系, 以下从时域与频域两个角度对两种偏差进行比较。

假设相位数据是可以展开为幂级数的连续函数 $x(t)$ (因此 $x(t)$ 无穷可导), 使用中值定理, 将 $1/\tau$ 带入差分运算内部, 则一阶差分为

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\tau} = x'(t_j), \quad t_j \in (t_i, t_{i+1}). \quad (18)$$

二阶差分为

$$\begin{cases} x'(t_{j1}) - x'(t_j) = (t_{j1} - t_j)x''(t_k) \\ x'(t_{j2}) - x'(t_{j1}) = (t_{j2} - t_{j1})x''(t_{k1}) \end{cases}$$

$$t_j \in (t_i, t_{i+1}), \quad t_{j1} \in (t_{i+1}, t_{i+2}), \quad t_{j2} \in (t_{i+2}, t_{i+3}),$$

$$t_k \in (t_j, t_{j1}), \quad t_{k1} \in (t_{j1}, t_{j2}). \quad (19)$$

从而三阶差分可以表示为

$$(t_{j2} - t_{j1})x''(t_{k1}) - (t_{j1} - t_j)x''(t_k) =$$

$$\begin{cases} (t_{j1} - t_j)(t_{k1} - t_k)x'''(\xi), & t_{j1} - t_j = t_{j2} - t_{j1} \\ (t_{j1} - t_j)(t_{k1} - t_k)x'''(\xi) + t_{\Delta}x''(t_{k1}), & (t_{j2} - t_{j1}) - (t_{j1} - t_j) = t_{\Delta} \end{cases}$$

$$\xi \in (t_k, t_{k1}) \quad (20)$$

因此, 从连续函数的角度看, 三阶差分得到的结果一般与函数的二阶导数有关。如果将函数用幂级数展开, 则三阶差分的结果为幂级数的三阶系数及其余高阶项。而 σ_z 仅与用于拟合的三次多项式的三次系数有关, 直观地看, σ_z 相对 σ_H 而言仅与低频噪声有关。

为了在频域内比较 σ_z 与 σ_H , 需要了解 σ_z 的频率响应及其性质。 σ_z 的时域采样函数是三阶正交多项式, 对应的频率响应在文献^[1-2]及相关文献^[6-8]中均未系统提及, 文献^[8]只对使用多项式进行谱估计做了简单描述。文献^[9]研究过多项式拟合对谱估计的影响, 但没有与原子时稳定度评估量进行分析比较。本文给出了三阶正交多项式对应的频率响应的基本分析特性, 这部分内容列于附录。

图 2 展示了三阶差分与三阶正交多项式的频率响应 (分别记为 $|H_{\sigma_H^2}(y)|^2$ 与 $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2$) 经比例缩放后的基本样貌。通过分析, $|H_{\sigma_H^2}(y)|^2$ 与 $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2$ 对低频幂律噪声估计的敛散性是相同的 (根据式 (13) 或频率响应分析), 但二者在 3 个方面存在明显差异:

- ① $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2$ 不具有周期性;
- ② $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2$ 的极大值是单调下降的;
- ③ $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2$ 的任一波瓣都是非对称的。

上述第 2 条性质决定了以三阶正交多项式作为采样函数定义的时域方差在某种程度上类似于带通方差 (band-pass variation), 从而与 σ_H 相比能够避免高频噪声对评估结果影响。直观地看, 图 2 展示的两种频率响应的第一波瓣较为相似, 细致的分析表明二者存在两方面差异。

① 二者宽度不同, $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2$ 比 $|H_{\sigma_H}(y)|^2$ 略窄;

② 二者的半高宽不同, 大致分别为 $0.266\ 86/\tau$ 与 $0.300\ 15/\tau$, $|H_{\sigma_H}(y)|^2/64$ 与 $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2/\tau$ 在半高宽内与横轴围成的面积分别为 $1.532\ 74$ 与 $1.676\ 17$, 非常接近。如果将 $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2/\tau$ 在半高宽度下的面积调整为与 $|H_{\sigma_H}(y)|^2$ 半高宽内的面积相等, 则调整后两个频率响应第一波瓣的图形如图 3 (a) 所示 (这里, 常数 $C = 58.523\ 51$ 为根据两个半高宽度下面积相等计算得出的近似常数), 图 3 (b) 直观地给出了图 3 (a) 中两种频率响应之差。

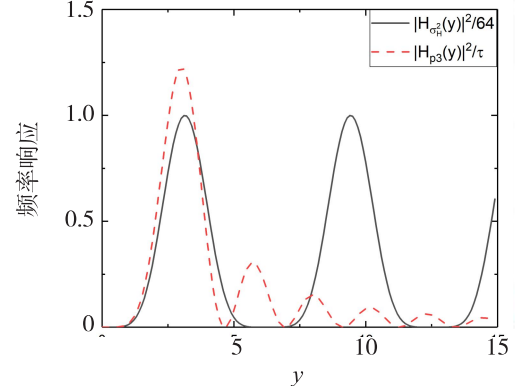
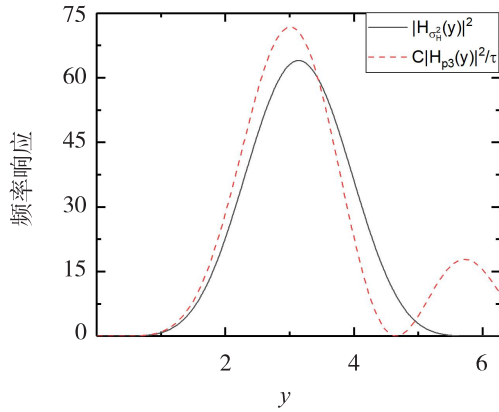
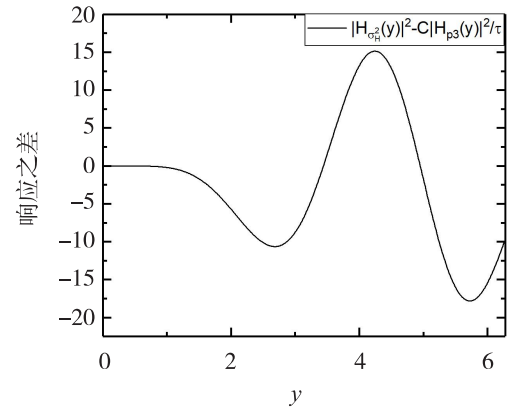


图2 三阶差分与三阶正交多项式的频率响应 (经特定比例缩放)



(a) 调整第一波瓣半高宽内面积相等后的频率响应



(b) 两种频率响应之差

图3 调整第一波瓣半高宽内面积相等后的频率响应及二者的差异 σ_H (常数 $C = 58.523\ 51$)

2.2 σ_z 的调整

从“频率响应第一波瓣对白噪声功率谱采样等效”这一条件出发, 可以重新推导 σ_z 估计式中的常系数。Matsakis^[2]给出的 σ_z 系数是从限制白噪声三阶差分平方的期望等于噪声方差而得出的, 即假设 x 是零均值、方差为 σ_x^2 的白噪声, 根据

$$E\left[\left(\frac{x_{i+3} - 3x_{i+2} + 3x_{i+1} - x_i}{2\sqrt{5}}\right)^2\right] = \sigma_x^2. \quad (21)$$

并假设 c_3 与三阶差分等效而得出 σ_z 的系数 $1/2\sqrt{5}$ 。根据之前讨论, 为使 $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2/\tau$ 半高宽度下面积与 $|H_{\sigma_H}(y)|^2$ 近似相等应对其乘以大约 58。记三阶正交多项式为 $\phi_3(t)$, 根据式 (11), 使 σ_z 对白噪声的评估与 σ_H “等效”的表达式应为

$$\frac{1}{\sqrt{6}\tau} \int_0^\tau \frac{20\sqrt{7}\sqrt{58}}{\sqrt{\tau}T^2} \phi_3(t) X(t) dt \stackrel{t_0=0}{=} \frac{27\sqrt{58}}{20\sqrt{14}} \tau^2 c_3. \quad (22)$$

新的 σ_z 估计式可被定义为

$$\sigma'_z(\tau) = \frac{27\sqrt{58}}{20\sqrt{14}} \tau^2 \langle c_3^2 \rangle^{1/2}. \quad (23)$$

式 (23) 中 τ 的数值为被评估数据区间长度的 $1/3$ 。考虑到式 (16) σ_z 所定义的稳定度时间尺度, τ 缩小 3 倍后其前面的系数应改为 $\frac{9}{2\sqrt{5}}$, 从而 σ'_z 与 σ_z 的系数之比为 $\frac{27\sqrt{58}}{20\sqrt{14}} / \frac{9}{2\sqrt{5}} \approx 1.37$, 这表明从第一波瓣对白噪声采样等效的原理出发得到的系数比 σ_z 定义的系数略大。

2.3 σ_z 与 σ_H 解析关系的探讨

根据之前的讨论, 建立 σ_z 与 σ_H 的一般解析关系存在诸多困难, 这些困难主要在两个方面。其一是频率响应对功率谱的采样上有两个问题: ① 两种频率响应在不同截止频率 f_h 下的采样的效果截然不同, 且与 f_h 相关; ② 即使设置统一的 f_h , 频率响应对不同噪声的采样效果也不相同, 且这种差异的解析表达式较为复杂。第二个困难则源自 σ_z 所采用的拟合法。由于正交多项式属于连续函数, 其对离散数据采样并积分所得的结果为零, 因此不能直接使用式 (11) 计算时域方差。式 (17) 相当于使用幂级数的部分和近似表示实测数据的变化情况, 但幂级数与 Fourier 频率并无直接关系。例如, 考察长度为 3τ 的数据中 $f=1/2\tau$ 这一频率成分, 从

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{\tau} x = \frac{\pi}{\tau} x - \frac{(\frac{\pi}{\tau} x)^3}{3!} + \frac{(\frac{\pi}{\tau} x)^5}{5!} - \dots \\ \cos \frac{\pi}{\tau} x = 1 - \frac{(\frac{\pi}{\tau} x)^2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{\tau} x)^4}{4!} - \dots \end{cases} \quad (24)$$

可知, 当 πx 与 τ 可以比较或更大时, 3 次多项式远不足以表示该频率成分, 且对于更高频率的成分, $(\frac{2\pi x}{n\tau})^3/3!$ 在 $\frac{2\pi x}{n\tau}$ 大于 1 时同样会出现在其幂级数展开式中。这使得 σ_z 的评估效果难以在频域中分析。

作为计算实例, 图 4 给出了 σ_z 与 σ_H 对振荡器中 5 种常见噪声的评估结果 (σ_z 的时间尺度已修

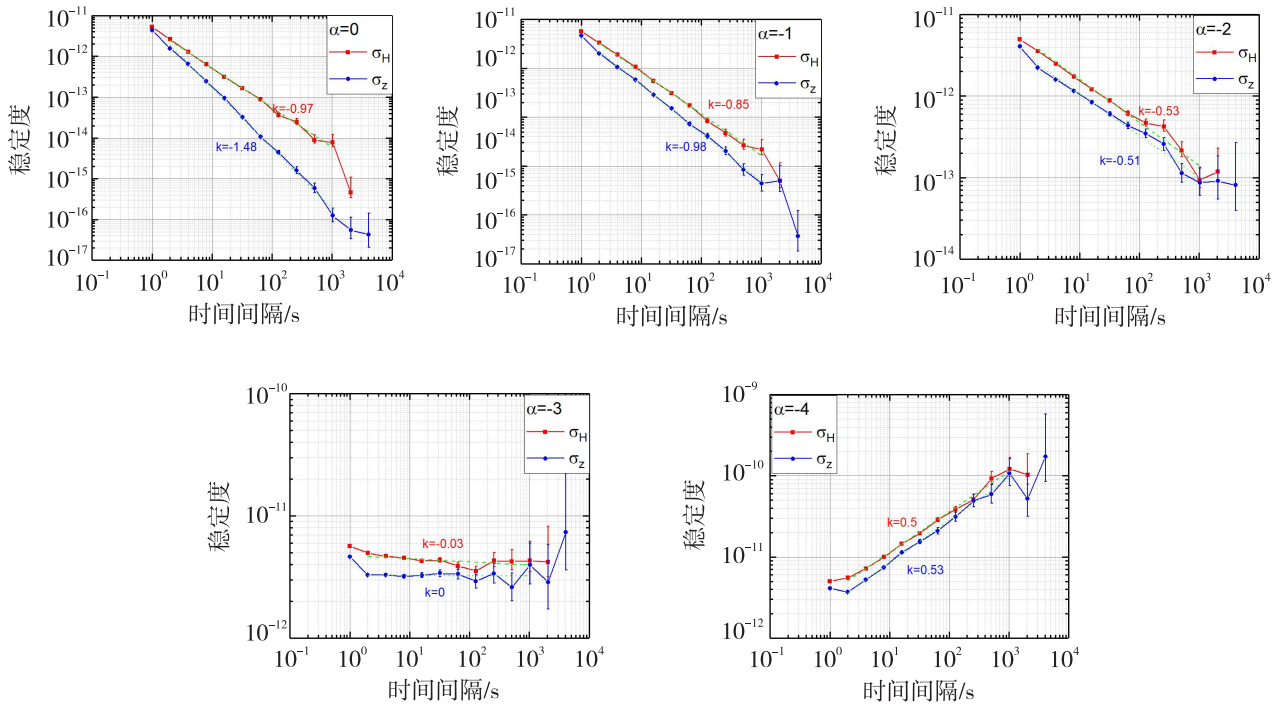
改为定义式 (16) 的 $1/3$), 噪声数据使用 stable32 (Hamilton 技术服务公司开发的稳定度计算软件) 模拟产生。为了将两种偏差计算所得的稳定度数值时间坐标对齐, 数据点数需等于 $2^n \times 3 + 1$, 这里取 $n=12$ 。图 4 中 σ_z 比 σ_H 多一个数据点是因为按照修改后的 σ_z 时间坐标, 对长度为 T 的数据其可计算到 $T/3$ 的稳定度 (但误差较大), 而为减小计算误差, stable32 给出的 σ_H 最大时间坐标 $T/6$ 。从图 4 可以看出以下结果。

① σ_z 的数值普遍比 σ_H 要小, 与理论分析一致。以相位白噪声为例, 对于 $\tau > 1$ s, 由于 σ_z 只对特定尺度下的低频噪声响应, 而 σ_H 易受高频噪声的影响, 使得 $\sigma_H > \sigma_z$, 尤其是在 τ 增加时, 在描述长期稳定度时 σ_H 受第一波瓣之后高频噪声的影响会更大, 导致二者差别更加显著。

② 对于相位白噪声与相位闪烁噪声, σ_z 与 σ_H 的斜率不同, 这是 σ_H 频率响应除去第一波瓣产生作用的体现。与之相比, σ_z 的变化趋势类似于带通方差^[1]。

③ 对于频率白噪声及更低频的噪声, 由于功率谱下降得很快, 两种频率响应对功率谱采样中起作用的主要部分为第一波瓣, 因此两种偏差的变化趋势基本一致。

④ 对最短尺度 $\tau=1$ s, 两种偏差的计算结果显示存在近似关系 $\sigma_H \approx 1.37\sigma_z$, 此时数据中不存在 $f > \frac{1}{\tau}$ 的频率成分, 因此 $|H_{\sigma_H}(y)|^2$ 除第一波瓣外没有作用。



注： σ_z 的时间坐标已修改为定义式中的 $1/3$ 。噪声数据使用 stable32 生成，数据点数为 12 289，噪声强度为 $\sigma_y(\tau = 1 \text{ s}) = 5 \times 10^{-12}$ 。为了避免端点波动的影响，每条曲线拟合斜率时只考虑 $\tau = 2 \sim 1\,024 \text{ s}$ 的稳定度数值

图4 σ_z 与 σ_H 对振荡器中 5 种噪声的稳定度计算结果

3 结语

目前，脉冲到达时间的测量噪声量级从几十纳秒到微秒不等，这与原子时纳秒量级的测量噪声相比非常大，但较大的测量噪声主要来源于观测设备的辐射计噪声，并不能体现脉冲星时的本征稳定度，且会显著增加脉冲星时中的高频噪声。通过本文分析可知，与 σ_H 相比， σ_z 主要受低频噪声的影响，而前者会受到低频与高频噪声的综合影响，从这一角度讲，脉冲星时的稳定度评估选用 σ_z 更为适宜。实际计算表明，对频率白噪声及更低频的噪声， σ_z 与 σ_H 的变化趋势是相似的，但从建立定量关系的角度出发，需要寻找新的稳定度评估量，以满足相关工作的需求。

参考文献：

- [1] RUTMAN J. Characterization of phase and frequency instabilities in precision frequency sources: fifteen years of progress[J]. Proceedings of the IEEE, 66(9): 1048-1075.
- [2] TAYLOR J H. Millisecond pulsars: nature's most stable clocks[J]. Proceedings of the IEEE, 1991, 79(7): 1054-1062.
- [3] MATSAKIS D N, TAYLOR J H, EUBANKS T M. A statistic for describing pulsar and clock stabilities[J]. Astronomy and Astrophysics, 1997, 326: 924-928.
- [4] LIU Y, XU B, ZHENG Z H, CHEN Z K, et al. Research on the joint timekeeping of pulsars and atomic clocks based on Vondrak-Cepek filtering[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2023, 521: 2553-2559.
- [5] ZHU X Z, ZHANG Z H, ZHAO C S, et al. Research on establishing a joint time-scale of pulsar time and atomic time based on a wavelet analysis method[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2024, 529: 1082-1090.
- [6] PÍRIZ R, GARBIN E, ROLDÁN P, et al. PulChron: a pulsar time scale demonstration for PNT systems[R]. Reston: Precise Time and Time Interval Meeting, 2019.
- [7] DEETER J E, BOYNTON P E. Techniques for the estimation of red power spectra. I-Context and methodology[J]. The Astrophysical Journal, 1982, 261: 337-350.

- [8] DEETER J E. Techniques for the estimation of red power spectra. II-Evaluation of alternative methods[J]. The Astrophysical Journal, 1984, 281: 482-491.

- [9] BLANDFORD R, NARAYAN R, ROMANI R W. Arrival time analysis for a millisecond pulsar[J]. Journal of Astrophysics and Astronomy, 1984, 5(4): 369-388.

附录 标准三阶正交多项式的传递函数与频率响应

按 Schmidt 正交化法, 使用多项式基函数 $1, x, x^2, \dots$, 可求得闭区间 $[0, T]$ 上的零到三阶正交多项式为

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_1(x) = x - \frac{T}{2} \\ \varphi_2(x) = x^2 - Tx + \frac{T^2}{6} \\ \varphi_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}Tx^2 + \frac{3}{5}T^2x - \frac{1}{20}T^3 \end{cases} \quad (25)$$

求出

$$\begin{cases} \int_0^T \varphi_0^2(x) dx = T \\ \int_0^T \varphi_1^2(x) dx = \frac{T^3}{12} \\ \int_0^T \varphi_2^2(x) dx = \frac{T^5}{180} \\ \int_0^T \varphi_3^2(x) dx = \frac{T^7}{2800} \end{cases} \quad (26)$$

从而得到零到三阶的标准正交多项式

$$\frac{1}{T^{1/2}}\varphi_0(x), \frac{2\sqrt{3}}{T^{3/2}}\varphi_1(x), \frac{6\sqrt{5}}{T^{5/2}}\varphi_2(x), \frac{20\sqrt{7}}{T^{7/2}}\varphi_3(x) \quad (27)$$

计算 $1, x, x^2, x^3$ 的傅里叶变换, 有

$$\begin{cases} \int_0^T e^{-i\omega x} dx = -\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega T} - 1) \\ \int_0^T x e^{-i\omega x} dx = -\frac{T}{i\omega}e^{-i\omega T} + \frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega T} - 1) \\ \int_0^T x^2 e^{-i\omega x} dx = -\frac{T^2}{i\omega}e^{-i\omega T} + \frac{2T}{\omega^2}e^{-i\omega T} + \frac{2}{i\omega^3}(e^{-i\omega T} - 1) \\ \int_0^T x^3 e^{-i\omega x} dx = -\frac{T^3}{i\omega}e^{-i\omega T} + \frac{3T^2}{\omega^2}e^{-i\omega T} + \frac{6T}{i\omega^3}e^{-i\omega T} - \frac{6}{\omega^4}(e^{-i\omega T} - 1) \end{cases} \quad (28)$$

根据傅里叶变换的线性性质, 可求得三阶正交多项式的传递函数

$$\int_0^T \varphi_3(x) e^{-i\omega x} dx = R + iI \quad (29)$$

式 (29) 中

$$\begin{cases} R = A \sin \omega T + B \cos \omega T - B \\ I = A \cos \omega T - B \sin \omega T + A \\ A = \frac{T^3}{20\omega} - \frac{3T}{\omega^3} \\ B = \frac{3T^2}{5\omega^2} - \frac{6}{\omega^4} \end{cases} \quad (30)$$

取 $T = 3\tau$, 记 $y = \omega\tau$, 可得标准三阶正交多项式的频率响应

$$|H_{p3}(y)|^2 = \frac{2^6 \cdot 5^2 \cdot 7}{3^5} \tau \left[\left(\frac{9}{20y} - \frac{3}{y^3} \right) \cos \frac{3y}{2} - \left(\frac{9}{5y^2} - \frac{2}{y^4} \right) \sin \frac{3y}{2} \right]^2 \quad (31)$$

式 (31) 比式 (15) 最后一式复杂, 下面从不同方面给出其性质及证明。

1 $y \rightarrow 0^+$ 时 $|H_{p3}(y)|^2$ 的特性

将 $\cos \frac{3y}{2}$ 与 $\sin \frac{3y}{2}$ 按幂级数展开, 使得式 (31)

中每一个 $y^r \cos \frac{3y}{2}$ 与 $y^r \sin \frac{3y}{2}$ 展开到 y^3 项, 化简

后得

$$|H_{p3}(y)|^2 = \frac{3^5}{2^{10} \cdot 5^2 \cdot 7} \tau y^6 + o(y^6) \quad (32)$$

由此知 $|H_{\sigma_{\text{H}}}(y)|^2$ 与 $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2$ 在 $y \rightarrow 0^+$ 时是同阶无穷小量, 从而二者对低频幂律噪声采样的敛散性相同。

2 $|H_{p3}(y)|^2$ 极值点的频率

为了研究式(31)的极值性质,可抛开前面的常系数,定义

$$F = \left[\left(\frac{9}{20y} - \frac{3}{y^3} \right) \cos \frac{3y}{2} - \left(\frac{9}{5y^2} - \frac{2}{y^4} \right) \sin \frac{3y}{2} \right]^2. \quad (33)$$

式(33)可以化为

$$\begin{cases} F = A_p \cos^2 \left(\frac{3}{2}y + \phi \right) \\ A_p = \frac{81y^6 + 216y^4 + 720y^2 + 1600}{400y^8} \\ \phi = \arccos \frac{9y^3 - 60y}{\sqrt{(9y^3 - 60y)^2 + (36y^2 - 40)^2}} \end{cases}. \quad (34)$$

$$\text{对 } \forall y > 0, \text{ 有 } |\phi'| = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{81y^6}{216y^4 + 720y^2 + 1600}} < \frac{3}{2},$$

$$A'_p = -\frac{162y^6 + 864y^4 + 4320y^2 + 12800}{400y^9} < 0, \text{ 且}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} A_p = +\infty, \lim_{y \rightarrow +\infty} A_p = 0, \lim_{y \rightarrow 0^+} A'_p = -\infty, \lim_{y \rightarrow +\infty} A'_p = 0.$$

这说明 F 是振幅总趋势逐渐减小的震荡函数。式

(34) 中第二式的导数为

$$F' = A'_p \cos^2 \left(\frac{3}{2}y + \phi \right) - 2A_p \cos \left(\frac{3}{2}y + \phi \right) \sin \left(\frac{3}{2}y + \phi \right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \phi' \right) \quad (35)$$

考虑到 $F \geq 0$, 对满足 $\cos^2 \left(\frac{3}{2}y + \phi \right) = 0$ (也即 $F = 0$)

的点有 $F' = 0$, 可以断定这些点必是 F 的极小值

点, 但对满足 $\cos^2 \left(\frac{3}{2}y + \phi \right) = 1$ 的点, $F' < 0$, 因

此 $\cos^2 \left(\frac{3}{2}y + \phi \right)$ 的极大值点并不对应 F 的极大值点。

为了给出 F 的极值与变化特性的证明, 对式(33)求一阶导数, 得:

$$\begin{cases} F' = 2CC' \\ C = \left(\frac{9}{20y} - \frac{3}{y^3} \right) \cos \frac{3y}{2} - \left(\frac{9}{5y^2} - \frac{2}{y^4} \right) \sin \frac{3y}{2} \\ C' = \left(-\frac{63}{20y^2} + \frac{12}{y^4} \right) \cos \frac{3y}{2} + \left(-\frac{27}{40y} + \frac{81}{10y^3} - \frac{8}{y^5} \right) \sin \frac{3y}{2} \end{cases} \quad (36)$$

首先, $y = \frac{k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{N}^+$) 不是 C 与 C' 的零点 (π 不

是有理代数方程的根)。 $\forall y > 0$, 可以验证 $\frac{9}{20y} - \frac{3}{y^3}$

与 $\frac{9}{5y^2} - \frac{2}{y^4}$, $-\frac{63}{20y^2} + \frac{12}{y^4}$ 与 $-\frac{27}{40y} + \frac{81}{10y^3} - \frac{8}{y^5}$ 不会

同时为零。因此, $C = 0$ 与 $C' = 0$ 分别等价于

$$\tan \frac{3y}{2} = \frac{9y^3 - 60y}{36y^2 - 40}, \quad (37)$$

$$\tan \frac{3y}{2} = \frac{(126y^2 - 480)y}{-27y^4 + 324y^2 - 320}. \quad (38)$$

如果 $C = C' = 0$, 则必有

$$\frac{9y^3 - 60y}{36y^2 - 40} = \frac{(126y^2 - 480)y}{-27y^4 + 324y^2 - 320}. \quad (39)$$

此方程的根为 $y = 0$, 与 $y > 0$ 矛盾。因此 C 与 C' 不会同时为零。

对式(36)求一阶导数, 得

$$\begin{cases} F'' = 2C'^2 + 2CC'' \\ C'' = \left(-\frac{81}{80y} + \frac{369}{20y^3} - \frac{60}{y^5} \right) \cos \frac{3y}{2} + \left(\frac{27}{5y^2} - \frac{423}{10y^4} + \frac{40}{y^6} \right) \sin \frac{3y}{2} \end{cases} \quad (40)$$

当 $C = 0$ ($F = 0$) 时, $F' = 0$, $F'' > 0$, 故满足 $C = 0$ 的点是 F 的极小值点。

当 $C' = 0$ 时, 按式(38), 有 $\cos \frac{3y}{2} =$

$\frac{-27y^4 + 324y^2 - 320}{126y^3 - 480y} \sin \frac{3y}{2}$, 此时, 可求得

$$F'' = -\frac{19683}{3200} y^2 \sin^2 \frac{3y}{2} \cdot \frac{3y^2 - 16}{(21y^2 - 80)^2}. \quad (41)$$

如果 $C'=0$ 的正根大于 $\frac{4}{\sqrt{3}}$, 就说明满足 $C'=0$ 的点
对应 F 的极大值点。

将 C' 的表达式化为:

$$\begin{cases} C' = B_p \cos(\frac{3y}{2} - \varphi) \\ B_p = \frac{\sqrt{(-126y^3 + 480y)^2 + (-27y^4 + 324y^2 - 320)^2}}{40y^5} \\ \varphi = \arccos \frac{6y(80 - 21y^2)}{\sqrt{(-126y^3 + 480y)^2 + (-27y^4 + 324y^2 - 320)^2}} \end{cases} \quad (42)$$

由于 $B_p \neq 0$ ($\forall y > 0$), C' 的零点由 $\cos(\frac{3y}{2} - \varphi)$ 确定。记 $A_1 = -126y^3 + 480y$, $B_1 = -27y^4 + 324y^2 - 320$,

将 B_1 视为 y^2 的二次函数, 可求得 B_1 的两个正零点

$$\text{为 } y_1 = \frac{\sqrt{54 - 2\sqrt{489}}}{3} \approx 1.04208, \quad y_2 = \frac{\sqrt{54 + 2\sqrt{489}}}{3} \approx$$

3.30365, 从而有

$$\varphi' = \begin{cases} -\frac{5832y^6 + \frac{3}{2}z}{729y^8 + z}, y \in (0, y_1) \cup (y_2, +\infty) \\ \frac{5832y^6 + \frac{3}{2}z}{729y^8 + z}, y \in (y_1, y_2) \end{cases}, \quad (43)$$

$$z = -1620y^6 + 1296y^4 + 23040y^2 + 102400. \quad (44)$$

将 z 视为 y^2 的三次多项式, 其实零点满足

$$y^2 = \frac{4}{15} + \frac{812}{675 \left(\frac{16\sqrt{57}}{243} + \frac{5303}{10125} \right)^{1/3}} + 4 \left(\frac{16\sqrt{57}}{243} + \frac{5303}{10125} \right)^{1/3},$$

分别为 $y_1' \approx -2.34286$, $y_2' \approx 2.34286$, 因此在

$$(0, \frac{4}{\sqrt{3}}] \text{ 上 } z > 0. \text{ 因为 } |\varphi'| = \frac{\frac{5832y^6}{z} + \frac{3}{2}}{\frac{729y^8}{z} + 1}, |\varphi'| \text{ 的数}$$

值取决于 $\frac{5832y^6}{729y^8} = \frac{8}{y^2}$ 。当 $\frac{8}{y^2} < \frac{3}{2}$, 即 $y > \frac{4}{\sqrt{3}}$ 时,

$|\varphi'| < \frac{3}{2}$, $\cos(\frac{3y}{2} - \varphi)$ 的相位将严格单调增加。

下面考察 $(0, \frac{4}{\sqrt{3}}]$ 上 $\frac{3y}{2} - \varphi$ 的变化趋势。根据上

述分析, 在 $(0, y_1)$ 上 $\varphi' < 0$, $\frac{3y}{2} - \varphi$ 是单调增函数,

当 $y=0$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3y}{2} - \varphi = -\frac{\pi}{2}$, $y=y_1$ 时,

$\frac{3y}{2} - \varphi = \frac{3}{2}y_1 \approx 1.56312 < \frac{\pi}{2}$ 。在 $(y_1, \frac{4}{\sqrt{3}})$ 上, $\varphi' > 0$,

$\frac{3y}{2} - \varphi$ 是单调减函数, $y = \frac{4}{\sqrt{3}}$ 时, $\frac{3y}{2} - \varphi \approx 1.28741$ 。

因此, 在 $(0, \frac{4}{\sqrt{3}}]$ 上 $\cos(\frac{3y}{2} - \varphi) \neq 0$ 。

这样, 证明了 $C'=0$ 的正根就是 F 极大值点的频率。

通过式 (36) 可知, F 的极小值等于零, 极大值大于零, 如果补充定义 $F(0) = \lim_{y \rightarrow 0^+} F(y) = 0$, F 的变化趋势就是从极小值点开始交替增加减小, 依次达到极大值点与极小值点。

3 $|H_{p3}(y)|^2$ 极大值的单调性

通过式 (34) 和 (35) 可知, $\cos^2(\frac{3}{2}y + \varphi)$ 相邻两个极小值点对应 F 相邻两个极小值点。当 $\cos^2(\frac{3}{2}y + \varphi)$ 从极大值变化到极小值时, $\cos^2(\frac{3}{2}y + \varphi)$ 与 A_p 均单调下降, 因此 $\cos^2(\frac{3}{2}y + \varphi)$ 相邻两个极小值点间对应 F 极大值的点必位于其左侧极小值点与极大值点之间。

记 F 相邻两个极大值点的 y 值为 y_1' , y_2' ($y_1' < y_2'$), 对应临近的 $\cos^2(\frac{3}{2}y + \varphi)$ 的极大值点

的 y 值为 y_1, y_2 , 则有 $y'_1 < y_1 < y'_2 < y_2$, 考虑到 A_p 的严格单调性, 就有 $A_p(y'_1) > A_p(y_1) > A_p(y'_2) > A_p(y_2)$, 从而

$$\begin{aligned} A_p(y'_1) \cos^2\left(\frac{3}{2}y'_1 + \phi(y'_1)\right) &> A_p(y_1) \cos^2\left(\frac{3}{2}y_1 + \phi(y_1)\right) > \\ A_p(y'_2) \cos^2\left(\frac{3}{2}y_1 + \phi(y_1)\right) &> A_p(y'_2) \cos^2\left(\frac{3}{2}y'_2 + \phi(y'_2)\right) \end{aligned} \quad (44)$$

这说明, F 的极大值是单调下降的。

4 $|H_{p3}(y)|^2$ 波瓣的非对称性

下面, 只从存在性上证明 F 的波瓣不可能是对称函数。

记 F 在某波瓣内左右两个极小值的 y 值为 y_i , y_{i+1} , 且 $y'_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$, $y'_i - \varepsilon_0 = y_i$, $y'_i + \varepsilon_0 = y_{i+1}$,

$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ 。如果该波瓣对称, 就有

$$\begin{aligned} A_p(y'_i - \varepsilon) \cos^2\left[\frac{3}{2}(y'_i - \varepsilon) + \phi(y'_i - \varepsilon)\right] &= \\ A_p(y'_i + \varepsilon) \cos^2\left[\frac{3}{2}(y'_i + \varepsilon) + \phi(y'_i + \varepsilon)\right] \end{aligned} \quad (45)$$

式 (45) 等价于 ($\varepsilon \neq \varepsilon_0$)

$$\frac{A_p(y'_i + \varepsilon)}{A_p(y'_i - \varepsilon)} = \frac{\cos^2\left[\frac{3}{2}(y'_i - \varepsilon) + \phi(y'_i - \varepsilon)\right]}{\cos^2\left[\frac{3}{2}(y'_i + \varepsilon) + \phi(y'_i + \varepsilon)\right]} \quad (46)$$

下面考察 $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ 时式 (46) 左右两侧分式的极限情况, 左侧的极限等于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{81(y'_i + \varepsilon)^6 + 216(y'_i + \varepsilon)^4 + 720(y'_i + \varepsilon)^2 + 1600}{81(y'_i - \varepsilon)^6 + 216(y'_i - \varepsilon)^4 + 720(y'_i - \varepsilon)^2 + 1600} \cdot \left(\frac{y'_i - \varepsilon}{y'_i + \varepsilon}\right)^8 \quad (47)$$

式 (46) 右侧的极限等于 (L'Hospital)

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \left[\frac{81(y'_i + \varepsilon)^6 + 216(y'_i + \varepsilon)^4 + 720(y'_i + \varepsilon)^2 + 1600}{81(y'_i - \varepsilon)^6 + 216(y'_i - \varepsilon)^4 + 720(y'_i - \varepsilon)^2 + 1600} \cdot \left(\frac{y'_i - \varepsilon}{y'_i + \varepsilon}\right)^6 \right]^2, & y'_i - \varepsilon_0 \neq 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \left[\frac{81(y'_i + \varepsilon)^6 + 216(y'_i + \varepsilon)^4 + 720(y'_i + \varepsilon)^2 + 1600}{81(y'_i - \varepsilon)^6 + 216(y'_i - \varepsilon)^4 + 720(y'_i - \varepsilon)^2 + 1600} \cdot \frac{81(y'_i - \varepsilon)^6 + 432(y'_i - \varepsilon)^4 + 1440(y'_i - \varepsilon)^2 + 3200}{81(y'_i + \varepsilon)^6} \right]^2, & y'_i - \varepsilon_0 = 0 \end{cases} \quad (48)$$

显然不论对 $y'_i - \varepsilon_0 = 0$ (也即第一波瓣) 或 $y'_i - \varepsilon_0 \neq 0$, 式 (46) 两侧取极限的过程中都不可能严格相等。因此式 (46), 式 (45) 在任一波瓣都不严格成立。

5 $|H_{p3}(y)|^2$ 第一个极大值

$C' = 0$ 的最小正根为 $|H_{p3}(y)|^2$ 第一个极大值的 y 值。下面利用式 (42) 求解 $C' = 0$ 的最小正根。

根据之前讨论, $C' = 0$ 的正根在 $(\frac{4}{\sqrt{3}}, +\infty)$ 内,

且 $\phi = \frac{3}{2}y - \varphi$ 在 $(\frac{4}{\sqrt{3}}, +\infty)$ 上严格单调增加。定义

$$\Phi = \phi - \frac{\pi}{2} \quad (49)$$

有 $\Phi(y = \frac{4}{\sqrt{3}}) \approx -0.28338 > -\pi$, $\Phi(y = \pi) \approx 0.10290 < \pi$,

在 $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \pi)$ 上 $\Phi' > 0$, 故式 (50) 在 $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \pi)$ 上必有

唯一零点, 其便是 $C' = 0$ 的最小正根。下面考察

Φ'' 的符号, 记

$$\Phi' = \frac{f}{g} \quad (50)$$

由式 (43),

$$\frac{f'}{g'} = \frac{5832 \times 6y^5 + \frac{3}{2}z'}{729 \times 8y^7 + z'} \quad (51)$$

由于

$$\frac{5832y^6}{729y^8} = \frac{8}{y^2} > \frac{5832 \times 6y^5}{729 \times 8y^7} = \frac{6}{y^2}。 \quad (52)$$

从而有

$$\frac{f}{g} > \frac{f'}{g'}。 \quad (53)$$

根据 g 的表达式, 可求得

$$g' = 1\,944y^5(3y^2 - 5) + 5184y^3 + 46\,080y > 0,$$

$$y \in (\frac{4}{\sqrt{3}}, \pi)。 \quad (54)$$

考虑到 $g > 0$, 从式 (53) 即可推出 $\varphi'' < 0$, 从而 $\Phi'' > 0$ 。

因此, 可以使用牛顿法求解 Φ 在 $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \pi)$ 上的

唯一零点。设置初始迭代的 $y = \pi$, 迭代终止条件

为 $\Phi < 10^{-15}$, 只需 4 次, 就可求出极大值点的横

坐标 $y \approx 3.009\,40$, 进而求出 $|H_{\sigma_{p3}}(y)|^2 / \tau$ 第一个

极大值约为 1.227 26。